

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
SO SÁNH HAI LŨY THỪA – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Phương pháp chung: để so sánh hai lũy thừa ta thường biến đổi về hai lũy thừa có cùng cơ số hoặc có cùng số mũ (có thể sử dụng các lũy thừa trung gian để so sánh).

Lưu ý một số tính chất sau:

- Với $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n, (a > 1)$$

$$a = 0 \text{ hoặc } a = 1 \text{ thì } a^m = a^n \text{ (} m, n \neq 0 \text{)}$$

- Với A, B là các biểu thức ta có:

$$A^n > B^n \Leftrightarrow A > B > 0$$

$$A^m > A^n \Leftrightarrow m > n \text{ và } A > 1, \text{ hay } m < n \text{ và } 0 < A < 1$$

Bài 1. So sánh

a) 333^{25} và 333^{30}

b) 2006^{15} và 2009^{15}

c) $(2018 - 2017)^{1000}$ và $(1997 - 1996)^{1999}$

Phương pháp giải

Với bài này học sinh có thể nhìn ngay ra cách giải vì các lũy thừa đã có cùng cơ số hoặc có cùng số mũ.

a) Vì $1 < 25 < 30$ nên $333^{25} < 333^{30}$

b) Vì $2006 < 2009$ nên $2006^{15} < 2009^{15}$

c) Ta có: $(2018 - 2017)^{1000} = 1^{1000} = 1$ và $(1997 - 1996)^{1999} = 1^{1999} = 1$

Vậy $(2008 - 2007)^{2000} = (1998 - 1997)^{1999}$

Bài 2. So sánh:

a) 99^{40} và 9999^{20} b) 11^{1979} và 37^{1320}

c) $1990^{20} + 1990^{19}$ và 1991^{20}

Phương pháp giải

Để làm được bài này học sinh cần sử dụng linh hoạt các tính chất của lũy thừa để đưa các lũy thừa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

a) Ta thấy: $99^2 < 99 \cdot 101 = 9999 \Rightarrow (99^2)^{20} < 9999^{20}$ hay $99^{40} < 9999^{20}$

b) Với bài toán này, ta khó tìm được ước chung của cơ số và số mũ để chuyển về dạng có cùng cơ số và cùng số mũ. Nên ta áp dụng phương pháp so sánh với số trung gian.

Chọn 11^{1980} là số trung gian để so sánh, ta có $11^{1979} < 11^{1980}$ (1)

So sánh 11^{1980} với 37^{1320} , ta có:

$$11^{1980} = 11^{3 \cdot 660} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$$

$$37^{1320} = 37^{2 \cdot 660} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$

Ta thấy: $1331^{660} < 1369^{660} \rightarrow 11^{1980} < 37^{1320}$ (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow 11^{1979} < 37^{1320}$

c) Có: $1990^{20} + 1990^{19} = 1990^{19} \cdot (1990+1) = 1991 \cdot 1990^{19}$

$$1991^{20} = 1991 \cdot 1991^{19}$$

Vì $1990^{19} < 1991^{19}$ nên $1990^{20} + 1990^{19} < 1991^{20}$

Bài 3. So sánh: a) 106^{50} và 74^{75} b) 2^{92} và 5^{36}

Phương pháp giải

Nếu ở bài trước có thể so sánh trực tiếp các lũy thừa cần so sánh hoặc chỉ sử dụng một lũy thừa trung gian thì bài này nếu chỉ áp dụng cách đó thì khó tìm ra lời giải cho bài toán. Với bài này ta cần so sánh qua hai lũy thừa trung gian:

$$\text{a) Ta thấy: } 106^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150} \quad (1)$$

$$74^{75} > 72^{75} = (8 \cdot 9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 106^{50} < 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} < 74^{75}.$$

$$\text{Vậy } 106^{50} < 74^{75}.$$

$$\text{b) } 2^{92} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18} \text{ và } 5^{36} = (5^2)^{18} = 25^{18} \Rightarrow 2^{91} > 32^{18} > 25^{18}.$$

$$\text{Vậy } 2^{92} > 5^{36}.$$

Bài 4. So sánh:

$$\text{a) } (-32)^8 \text{ và } (-16)^{16}$$

$$\text{b) } (-32)^9 \text{ và } (-18)^{13}$$

$$\text{c) } \left(\frac{-1}{16}\right)^{100} \text{ và } \left(\frac{-1}{2}\right)^{450}$$

Phương pháp giải

Đưa về so sánh hai lũy thừa tự nhiên.

$$\text{a) } (-32)^8 = 32^8 = (2 \cdot 16)^8 = 2^8 \cdot 16^8$$

$$(-16)^{16} = 16^{16} = 16^8 \cdot 16^8$$

$$\text{Dễ dàng nhận thấy } 2^8 < 16^8 \rightarrow 2^8 \cdot 16^8 < 16^8 \cdot 16^8 \text{ hay } (-32)^8 < (-16)^{16}$$

$$\text{b) } (-32)^9 = -32^9 = -(2^5)^9 = -2^{45}$$

$$\text{Mà } 2^{45} < 2^{52} = 16^{13} < 18^{13} \Rightarrow -2^{45} > -18^{13} = (-18)^{13}.$$

$$\text{Vậy } (-32)^9 > (-18)^{13}.$$

c) Ta có: $\left(\frac{-1}{16}\right)^{100} = \frac{1}{16^{100}} = \frac{1}{2^{400}}$ và $\left(\frac{-1}{2}\right)^{450} = \frac{1}{2^{450}}$

Vì $2^{400} < 2^{450}$ nên $\frac{1}{2^{400}} > \frac{1}{2^{450}}$

Vậy $\left(\frac{-1}{16}\right)^{100} > \left(\frac{-1}{2}\right)^{450}$.

Bài 5. So sánh A và B biết: $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1}$; $B = \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1}$

Phương pháp giải

Trước khi tìm lời giải bài này giáo viên có thể cung cấp cho học sinh tính chất sau: Với mọi số tự nhiên a, b, c khác 0, ta chứng minh được:

- Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$
- Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

Áp dụng tính chất trên vào bài, ta có:

Vì $A = \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < 1$ nên:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2008^{2008} + 1}{2008^{2009} + 1} < \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1 + 2007} = \frac{2008^{2008} + 2008}{2008^{2009} + 2008} = \frac{2008 \cdot (2008^{2007} + 1)}{2008 \cdot (2008^{2008} + 1)} \\ &= \frac{2008^{2007} + 1}{2008^{2008} + 1} = B \end{aligned}$$

Vậy $A < B$.

Cách 2:

Ta có: $2008 \cdot A = \frac{(2008^{2008} + 1) \cdot 2008}{2008^{2009} + 1} = \frac{2008^{2009} + 1 + 2007}{2008^{2009} + 1} = 1 + \frac{2007}{2008^{2009} + 1}$

$$2008.B = \frac{(2008^{2007} + 1).2008}{2008^{2008} + 1} = \frac{2008^{2008} + 1 + 2007}{2008^{2008} + 1} = 1 + \frac{2007}{2008^{2008} + 1}$$

Vì $2008^{2009} + 1 > 2008^{2008} + 1$ nên $\frac{2007}{2008^{2009} + 1} < \frac{2007}{2008^{2008} + 1}$ nên $2008.A < 2008.B$

Vậy $A < B$

Bài 6. So sánh M và N biết: $M = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1}$; $N = \frac{100^{102} + 1}{100^{101} + 1}$

Phương pháp giải

Cách 1: $N = \frac{100^{102} + 1}{100^{101} + 1} > 1$

$$\Rightarrow N = \frac{100^{102} + 1}{100^{101} + 1} > \frac{100^{102} + 1 + 99}{100^{101} + 1 + 99} = \frac{100^{102} + 100}{100^{101} + 100} = \frac{(100^{101} + 1).100}{(100^{100} + 1).100} = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} = M$$

Vậy $M < N$.

Cách 2: $M = \frac{100^{101} + 1}{100^{100} + 1} = \frac{100^{101} + 100 - 99}{100^{100} + 1} = \frac{(100^{100} + 1).100 - 99}{100^{100} + 1} = 100 - \frac{99}{100^{100} + 1}$

$$N = \frac{100^{102} + 1}{100^{101} + 1} = \frac{100^{102} + 100 - 99}{100^{101} + 1} = \frac{(100^{101} + 1).100 - 99}{100^{101} + 1} = 100 - \frac{99}{100^{101} + 1}$$

Vì $100^{100} + 1 < 100^{101} + 1$ nên $\frac{99}{100^{100} + 1} > \frac{99}{100^{101} + 1}$

$$\Rightarrow 100 - \frac{99}{100^{100} + 1} < 100 - \frac{99}{100^{101} + 1}$$

Vậy $M < N$.

Bài 7. So sánh: $A = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1}$ và $B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1}$

Phương pháp giải

Cách 1. Ta có:

$$B = \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} < 1 \Leftrightarrow \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} < \frac{13^{16} + 1 + 12}{13^{17} + 1 + 12} = \frac{13^{16} + 13}{13^{17} + 13} = \frac{13(13^{15} + 1)}{13(13^{16} + 1)} = \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1} = A$$

Vậy $A > B$

Cách 2 :

$$\text{Ta có : } 13.A = \frac{(13^{15} + 1).13}{13^{16} + 1} = \frac{13^{16} + 1 + 12}{13^{16} + 1} = 1 + \frac{12}{13^{16} + 1}$$

$$13.B = \frac{(13^{16} + 1).13}{13^{17} + 1} = \frac{13^{17} + 1 + 12}{13^{17} + 1} = 1 + \frac{12}{13^{17} + 1}$$

$$\text{Ta thấy } 13^{16} + 1 < 13^{17} + 1 \rightarrow \frac{12}{13^{16} + 1} > \frac{12}{13^{17} + 1} \rightarrow 13.A > 13.B$$

Hay $A > B$

Bài 8. So sánh: $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1}$ và $B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$

Phương pháp giải

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{99} + 1} \text{ và } B = \frac{100^{69} + 1}{100^{68} + 1}$$

Bài này không giống các bài trước. Học sinh sẽ lúng túng khi bắt tay làm bài, giáo viên cần hướng dẫn: Quy đồng mẫu A và B, ta có:

$$A = \frac{(100^{100} + 1).(100^{68} + 1)}{(100^{99} + 1).(100^{68} + 1)} \quad \text{và} \quad B = \frac{(100^{69} + 1).(100^{99} + 1)}{(100^{68} + 1).(100^{99} + 1)}$$

Để so sánh A và B lúc này ta có thể so sánh tử số của A và tử số của B bằng cách so sánh hiệu tử số của A trừ tử số của B với 0.

$$\begin{aligned} & (100^{100} + 1).(100^{68} + 1) - (100^{69} + 1).(100^{99} + 1) \\ &= 100^{168} + 100^{100} + 100^{68} + 1 - 100^{168} - 100^{99} - 100^{69} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68} \\ &= 100 \cdot 100^{99} - 100^{99} - 100 \cdot 100^{68} + 100^{68} \\ &= 99 \cdot 100^{99} - 99 \cdot 100^{68} \\ &= 99 \cdot (100^{99} - 100^{68}) > 0 \text{ (vì } 100^{99} > 100^{68}\text{)}. \end{aligned}$$

Vậy $A > B$.

VINASTUDY.VN