VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

TÍNH TOÁN TRÊN CÁC LŨY THỪA (PHẦN 2) – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1. a) Tính tổng: $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$

b) Áp dụng tính các tổng sau:

$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1982}$

$C = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{n-1} + 7^n$

Phương pháp giải

a) Đây là một bài toán tổng quát, giáo viên có thể gợi ý trực tiếp cho học sinh cách làm để thu gọn các tổng lũy thừa này, ta nhân cả hai vế của biểu thức với cơ số của các lũy thừa.

* Xét a = 1, ta có: $S_n = 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^n = (n+1).1 = n+1$

* Xét $a \neq 1$, ta có:

$S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$

$\Rightarrow a.S_n = a + a^2 + \ldots + a^{n+1}$

$\Rightarrow a.S_n - S_n = a^{n+1} - 1$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

b) Học sinh dễ dàng tính được tổng A, B, C nhờ công thức S_n

$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{1982} = 2^{1983} - 1$

$C = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{n-1} + 7^n = \dfrac{7^{n+1}-7}{6}$

Bài 2. Thu gọn tổng sau: $M = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{1008}$

Phương pháp giải

Nhân cả 2 vế của M với cơ số chung là 2, khi đó 2M sẽ xuất hiện các số hạng chung, ta có thể cộng hoặc trừ M với 2M để triệt tiêu các số hạng đó:

$M = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{1008}$

$\Rightarrow 2M = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \ldots + 2^{1009}$

$\Rightarrow 2M + M = 2^{1009} + 1$

$\Rightarrow M = \dfrac{2^{1009}+1}{3}$

Bài 3. Tính:

a) $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{200}}$ b) $B = 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{5^3} + \ldots + \dfrac{1}{5^{400}}$

Phương pháp giải

a) Ta có:

$A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{199}} + \dfrac{1}{2^{200}}$

$\Rightarrow 2A = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{199}}$

$\Rightarrow 2A - A = (1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{199}}) - (\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{200}})$

$\Rightarrow A = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} - \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{199}} - \dfrac{1}{2^{199}} - \dfrac{1}{2^{200}}$

$\Rightarrow A = 1 - \dfrac{1}{2^{200}}$

b) Tương tự ta có:

$$B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^{400}}$$

$$\Rightarrow 5B = 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^{399}}$$

$$\Rightarrow 5B - B = \left(5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^{399}}\right) - \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^{399}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4B = 5 + 1 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^{399}} - \frac{1}{5^{399}} - \frac{1}{5^{400}}$$

$$\Leftrightarrow 4B = 5 - \frac{1}{5^{400}}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{5 - \frac{1}{5^{400}}}{4}$$

Bài 4. Tính: $B = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1$

Phương pháp giải

Với mọi số tự nhiên a và b, ta có: $(a - b).(a + b) = a^2 - b^2$

Thật vậy, ta có:

$(a - b).(a + b) = (a - b).a + (a - b).b = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Vậy: $(a - b).(a + b) = a^2 - b^2$

Áp dụng đẳng thức trên ta được:

$B = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 2^2 - 1$

$= (100 - 99).(100 + 99) + (98 - 97).(98 + 97) + \ldots + (2 - 1).(2 + 1)$

$= 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1$

= 100.(100 + 1) : 2

= 5050

Bài 5. Chứng tỏ rằng: H = $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}<1\,(n\in N^*, n\neq 1)$

Phương pháp giải

Lưu ý: $\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,(n\in N^*)$

Ta có:

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4};...;\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1).n}$

$\rightarrow H=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1).n}$

$\rightarrow H<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}<1$

Vậy $H<1$

Bài 6. Chứng tỏ:

a) $H=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}<1$

b) $K=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{14^2}<\frac{1}{2}$

Phương pháp giải

a) Áp dụng bài tập 9 ta có :

$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2};\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};\ \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}\ ;...;\ \frac{1}{2010^2}<\frac{1}{2009.2010}$

$$=> H = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2009^2}+\frac{1}{2010^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2009.2010}\ (*)$$

Mà $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{2009.2010}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2010}<1$

Nên, từ (*) => H < 1

b) K = $\frac{1}{2^2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}) < \frac{1}{2^2}(1+1) = \frac{1}{2^2}.2 = \frac{1}{2}$

(Vì theo bài tập 9: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<1$)

Vậy K < $\frac{1}{2}$.

VINASTUDY.VN