VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

TOÁN ĐỐ VỚI LŨY THỪA – ĐÁP ÁN

____www.vinastudy.vn____

Dạng toán đố với lũy thừa có một số bài chủ yếu liên quan đến số chính phương. (Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên).

Phương pháp: Cần hiểu một số kiến thức sau.

- Số chính phương chỉ có thể có số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9 và không thể có số tận cùng bằng 2, 3, 7, 8.
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.
- Một số chính phương chia hết cho 2 thì cũng phải chia hết cho 4, hay 1 số chính phương chia hết cho p thì cũng phải chia hết cho p^2 ($p \in N^*$)

Bài 1. Tìm số chính phương nào có 4 chữ số được viết bởi các chữ số: 3; 6; 8; 8.

Phương pháp giải

Với bài toán này, ta phải sử dụng phương pháp loại trừ để tìm ra đáp án:

Gọi số chính phương phải tìm là n^2

Số chính phương không tận cùng bằng 3, 8 nên n^2 có tận cùng là 6.

Số tận cùng là 86 thì chia hết cho 2, không chia hết cho 4 nên không phải là số chính phương. Vậy n^2 có tận cùng là 36. Do đó số chính phương cần tìm là **8836.**

Bài 2. Tìm a,b ∈ N* thỏa mãn: $a^2 = b^2 + 35$ (1)

Phương pháp giải

Vận dụng công thức: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ta có:

(1) ⇔ $a^2 – b^2 = 35$

⇔ $(a+b)(a-b) = 35$ (*)

Do 35 là số lẻ nên (a+b) và (a-b) đều phải là số lẻ.

Ta thấy: 35 = 35.1 = 7.5, từ (*) ta có

$\begin{cases} a+b=35 \\ a-b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+b=7 \\ a-b=5 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a+b=35 \\ a-b=1 \end{cases} \rightarrow$ a = 18 và b = 17

Với $\begin{cases} a+b=7 \\ a-b=5 \end{cases} \rightarrow$ a = 6 và b = 1

Vậy $\left[\begin{array}{l} a=18, b=17 \\ a=6, b=1 \end{array} \right.$ **thỏa mãn yêu cầu đề ra.**

Bài 3. Tìm a,b ∈ N*thỏa mãn: $a^2 = 4b^2 + 77$

Phương pháp giải

Tương tự bài 2 ta có:

$a^2 - 4b^2 = 77$

⇔ $(a-2b)(a+2b) = 77$

Do 77 là số lẻ nên (a+b) và (a-b) đều phải là số lẻ.

Ta thấy: 77 = 7.11 = 77.1,nên ta có

$\begin{cases} a+2b=77 \\ a-2b=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+2b=11 \\ a-2b=7 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a+2b=77 \\ a-2b=1 \end{cases} \rightarrow$ a = 39, b = 19

Với $\begin{cases} a+2b=11 \\ a-2b=7 \end{cases} \rightarrow$ a = 9, b = 1

Vậy $\left[\begin{array}{l} a=39, b=19 \\ a=9, b=1 \end{array}\right.$ **thỏa mãn yêu cầu đề ra.**

Bài 4. Tìm n ∈ N* sao cho: $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ (*)

Phương pháp giải

Ta có:

$2^8 + 2^{11} = 2^8(2^3 + 1) = 2^8.9 = (2^4)^2.\ 3^2 = 16^2.3^2 = (16.3)^2 = 48^2$

(*) ⇔ $48^2 + 2^n = a^2$

⇔$2^n = a^2 - 48^2 = (a+48)(a-48)$

Đặt $\begin{cases} a+48=2^p \\ a-48=2^q \end{cases}$ (1) với p,q ∈ N*; p > q → p + q = n

Cộng vế với vế của 1 ta được: $96 = 2^p – 2^q$

⇔ $2^5.3 = 2^p – 2^q = 2^q.\ 2^{p-q} - 2^q$

⇔ $2^5.3 = 2^q(2^{p-q} – 1)$

⇔ $2^5(2^2 -1) = 2^q(2^{p-q} – 1)$

⇔ $\begin{cases} q=5 \\ p-q=2 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} p=7 \\ q=5 \end{cases} \rightarrow$ n = 12

Vậy n = 12 thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Bài 5. Tìm số chính phương có 4 chữ số sao cho có 2 chữ số đầu giống nhau và 2 chữ số cuối giống nhau.

Phương pháp giải

Gọi số chính phương cần tìm có dạng $\overline{aabb}$

Ta có: $\overline{aabb} = n^2$

$\Leftrightarrow$ $a.10^3 + a.10^2 + b.10 + b = n^2$

$\Leftrightarrow$ $11.(100a + b) = n^2$

$\rightarrow n^2 \vdots 11 \rightarrow n \vdots 11$

Lại có do n^2 có 4 chữ số nên $32 < n < 100 \rightarrow n \in \{33;44;55...;99\}$

Thử vào ta có n=88 $\rightarrow \overline{aabb} = 7744$

Vậy số cần tìm là 7744.

Bài 6: Chứng minh rằng: $Q = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$

Phương pháp giải

Ta có:

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; ...; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$

$\Leftrightarrow Q = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$

$\Leftrightarrow Q = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Vậy Q < 1

Bài 7. Tìm các số tự nhiên liên tiếp $a_1, a_2, a_3, ..., a_{45}$ để:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + ... + \frac{1}{a_{45}^2} = 1 \quad (*)$$

Phương pháp giải

+) Xét $a_1 = 1$ ta có

(*) ⇔ $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{45^2} > 1 \rightarrow$ vô lý

+) Xét $a_1 > 1$ ta lấy 1 số $a_0 < a_1 \rightarrow a_0 \geq 1$

$$\frac{1}{{a_1}^2}+\frac{1}{{a_2}^2}+\frac{1}{{a_3}^2}+...+\frac{1}{{a_{45}}^2} < \frac{1}{a_0.a_1}+\frac{1}{a_1.a_2}+...+\frac{1}{a_{44}.a_{45}} = \frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{44}}-\frac{1}{a_{45}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{{a_1}^2}+\frac{1}{{a_2}^2}+\frac{1}{{a_3}^2}+...+\frac{1}{{a_{45}}^2} < \frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{45}} \leq 1-\frac{1}{a_{45}} < 1 \rightarrow \text{vô lý}$$

Vậy không tìm được các số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{45}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 8. Tìm các số tự nhiên liên tiếp $a_1, a_2, a_3, ..., a_{45}$ với $a_1<a_2<...<a_{45}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+...+\frac{1}{a_{44}.a_{45}} = \frac{44}{45}$$

Phương pháp giải

Tương tự các bài tập trên ta có:

$$\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+...+\frac{1}{a_{44}.a_{45}} = \frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_{44}}-\frac{1}{a_{45}} = \frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{45}} = \frac{44}{45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{45}-a_1}{a_1.a_{45}} = \frac{44}{a_1.a_{45}} = \frac{44}{45} \rightarrow a_1.a_{45} = 45 = 1.45 = 5.9 = 3.15$$

Lại có do $a_1, a_2, a_3, ..., a_{45}$ là các số tự nhiên liên tiếp nên $a_{45} - a_1 = 44$

$\rightarrow a_1 = 1$, $a_{45} = 45$

Vậy dãy số cần tìm là 1,2,3…,45.

VINASTUDY.VN