VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

TÌM SỐ HỮU TỈ CHƯA BIẾT TRONG MỘT ĐẲNG THỨC (PHƯƠNG PHÁP ĐẶT SỐ HỮU TỈ VỀ DẠNG PHÂN SỐ TỐI GIẢN) – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Tìm các số hữu tỉ a, b thỏa mãn:

1) $a^2+4b^2=2ab.$

2) $4a^2+9b^2=6ab.$

Bài 2: Có tồn tại hay không các số hữu tỉ a, b thỏa mãn: $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}=\frac{2}{2a-b}.$

Bài 3: Số hữu tỉ x thỏa mãn x^2+2 là số nguyên. Chứng minh rằng: x cũng là số nguyên.

Bài 4: Tìm tất cả các số hữu tỉ x sao cho $x+\frac{1}{4x}$ là số nguyên.

Bài 5: Tìm các số hữu tỉ dương a, b sao cho $a+b, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

Bài 1:

1) $a^2+4b^2=2ab \quad (1).$

Ta có $a^2\ge 0, b^2\ge 0$ nên $2ab=a^2+4b^2\ge 0.$ Do đó a, b cùng dấu

TH1: $a\ge 0, b\ge 0.$

Từ (1) ta có: $a^2=2ab-4b^2=2b(a-2b).$

Mà $a^2\ge 0, b\ge 0\Rightarrow a-2b\ge 0\Rightarrow a\ge 2b.$

Mặt khác, ta có: $4b^2=2ab-a^2=a(2b-a).$

Mà $4b^2\ge 0, a\ge 0\Rightarrow 2b-a\ge 0\Rightarrow 2b\ge a.$

Do đó ta có a=2b.

Thay vào (1) ta được: $(2b)^2+4b^2=2.2b.b\Rightarrow 8b^2=4b^2\Rightarrow 4b^2=0\Rightarrow b=0.$

Lại có a=2b nên a=b=0

Thử lại ta thấy a=b=0 thỏa mãn (1)

TH2: $a<0, b<0.$

Đặt $x=-a, y=-b,$ ta có x>0, y>0

Thay vào (1) ta được: $x^2+4y^2=2xy.$

Tương tự TH1 ta được x=y=0 (không thỏa mãn x>0, y>0).
Vậy các số a, b cần tìm là a=b=0.
2) Chứng minh 2a=3b (lập luận tương tự ý trên)
Đáp số: a=b=0.

Bài 2: Giả sử tồn tại các số hữu tỉ a, b sao cho: $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}=\frac{2}{2a-b}$ (1).

Điều kiện: $a\neq 0, b\neq 0, 2a-b\neq 0.$

Vì a, b là 2 số hữu tỉ khác 0 nên đặt $\begin{cases} a=\frac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{Z}, m\neq 0, n\neq 0, (m,n)=1\right) \\ b=\frac{p}{q}\left(p,q\in\mathbb{Z}, p\neq 0, q\neq 0, (p,q)=1\right) \end{cases}$

Thay vào (1) ta được:

$$\frac{1}{\frac{m}{n}}-\frac{2}{\frac{p}{q}}=\frac{2}{2.\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}\Rightarrow\frac{n}{m}-\frac{2q}{p}=\frac{2}{\frac{2m}{n}-\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{n}{m}-\frac{2q}{p}\right)\left(\frac{2m}{n}-\frac{p}{q}\right)=2$$

$$\Rightarrow 2-4.\frac{q}{p}.\frac{m}{n}-\frac{n}{m}.\frac{p}{q}+2=2$$

$$\Rightarrow 2=\frac{4mq}{np}+\frac{np}{mq}=\frac{4(mq)^2+(np)^2}{(mq).(np)}$$

$$\Rightarrow (np)^2+4(mq)^2=2.(np).(mq)$$

Đặt np=x, mq=y. Ta có: x, y là các số tự nhiên và $x^2+4y^2=2xy.$
Theo bài 1, ta có: x=y=0 hay np=mq=0.
Điều này không xảy ra vì $n\neq 0,\ p\neq 0.$
Do đó giả sử sai hay không tồn tại các số hữu tỉ a, b thỏa mãn đề bài.

Bài 3: Đặt $x=\frac{a}{b}\left(a,b\in\mathbb{Z},(a,b)=1,b\neq 0\right).$

Theo đề bài ta có: $\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow a^2\vdots b^2\Rightarrow a^2\vdots b.$

Mà $(a,b)=1$ nên $1\vdots b\Rightarrow b=\pm 1$

Do đó ta có $x=\pm a$ là số nguyên. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: Đặt $x=\frac{a}{b}\left(a,b\in\mathbb{Z},(a,b)=1,b\neq 0\right)$.

Theo đề bài, ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{4a}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{4a^2+b^2}{4ab}\in\mathbb{Z}$.

Do đó ta có $4a^2+b^2\vdots 4ab$ (1).

Từ (1) ta có: $4a^2+b^2\vdots a\Rightarrow b^2\vdots a\Rightarrow a=\pm 1$ (vì (a,b)=1).

Mặt khác, từ (1) ta có: $4a^2+b^2\vdots b\Rightarrow 4a^2\vdots b\Rightarrow 4\vdots b$ (vì (a,b)=1) $\Rightarrow b\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 4\}$.

Mà $x=\frac{a}{b}$ nên ta có $x\in\left\{\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{2},\pm 1\right\}$.

Thử lại ta thấy chỉ có $x=\pm\frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy tất cả các số hữu tỉ x cần tìm là $x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{2}$.

Bài 5: Do a,b là các số hữu tỉ dương nên ta có thể đặt

$$a=\frac{m}{n},b=\frac{p}{q}\left(m,n,p,q\in\mathbb{N}^*,(m,n)=(p,q)=1\right).$$

Khi đó ta có: $a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$ là số nguyên.

Suy ra $mq+np\vdots nq$ (1).

Từ (1) ta có: $mq+np\vdots n\Rightarrow mq\vdots n\Rightarrow q\vdots n$ (vì $(m,n)=1$).

Đồng thời ta có: $mq+np\vdots q\Rightarrow np\vdots q\Rightarrow n\vdots q$ (vì $(p,q)=1$).

Kết hợp với n, q là các số nguyên dương ta suy ra n=q.

Mặt khác ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{m}+\frac{q}{p}=\frac{np+mq}{mp}$ là số nguyên.

Lập luận tương tự như trên ta suy ra m=p.

Do m=p, n=q nên ta có: $a=b=\frac{m}{n}$.

Thay vào giả thiết ta được: $a+b=2a=\frac{2m}{n}$ là số nguyên và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2n}{m}$ là số nguyên.

Lại có $(m,n)=1$ nên $2\vdots m, 2\vdots n\Rightarrow m,n\in\{1,2\}$ (vì m,n là các số nguyên dương)

Do đó $a=b=\frac{m}{n}\in\left\{\frac{1}{2},1,2\right\}$.

Thử lại ta thấy các số a,b như trên thỏa mãn đề bài.

Vậy các số a,b cần tìm là: $a=b=\frac{1}{2}, a=b=1, a=b=2$.