

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CĂN BẬC HAI – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1:

1) So sánh các số: $x = \sqrt{961} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - 1\right)$, $y = \sqrt{1089} - \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 1\right)$.

2) Thực hiện phép tính: $A = (\sqrt{6,25} - 5\sqrt{0,49}) \cdot \left(19\sqrt{\frac{36}{361}} - 17\sqrt{\frac{81}{289}}\right)$.

Bài 2: Chứng minh rằng:

1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, với a, b là các số thực dương.

2) $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$, với a, b là các số thực dương và $a > b$.

Bài 3: Tìm các số thực x, y, z biết rằng: $\sqrt{(x-2)^2} + |2y-x| + \sqrt{(z-3y)^2} = 0$.

Bài 4: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Rút gọn biểu thức:

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Lời giải

Bài 1:

1) Ta có: $x = \sqrt{961} - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - 1\right) = 31 - \frac{1}{\sqrt{6}} + 1 = 32 - \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$y = \sqrt{1089} - \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + 1\right) = 33 - \frac{1}{\sqrt{7}} - 1 = 32 - \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Do $\frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{1}{\sqrt{7}}$ nên $x < y$.

Vậy $x < y$.

2) $A = (2,5 - 5 \cdot 0,7) \cdot \left(19 \cdot \frac{6}{19} - 17 \cdot \frac{9}{17}\right) = (2,5 - 3,5)(6 - 9) = 3$.

Vậy $A = 3$.

Bài 2:

1) Với a, b là các số thực dương, ta có:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2 \Leftrightarrow a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b} > a+b \Leftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a > 0, b > 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

2) Do $a > b$ nên ta có $a-b > 0$

Theo phần trên, ta có: $\sqrt{a-b} + \sqrt{b} > \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Bài 3: $\sqrt{(x-2)^2} + |2y-x| + \sqrt{(z-3y)^2} = 0$ (1).

Từ (1) ta có: $|x-2| + |2y-x| + |z-3y| = 0$.

Mà $|x-2|, |2y-x|, |z-3y| \geq 0$ nên ta có: $|x-2| = |2y-x| = |z-3y| = 0$.

Do đó ta có:
$$\begin{cases} |x-2|=0 \\ |2y-x|=0 \\ |z-3y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2y-x=0 \\ z-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{x}{2}=1 \\ z=3y=3 \end{cases}$$

Vậy $x=2, y=1, z=3$ thỏa mãn đề bài.

Bài 4: Do $xy + yz + zx = 1$ nên ta có:

$$1 + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = x(x+y) + z(x+y) = (x+z)(x+y).$$

$$1 + y^2 = y^2 + xy + yz + zx = y(x+y) + z(x+y) = (x+y)(y+z).$$

$$1 + z^2 = z^2 + yz + zx + xy = z(y+z) + x(y+z) = (x+z)(y+z).$$

Do đó ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}} = x\sqrt{(y+z)^2} = x|y+z| = x(y+z).$$

(do $y+z > 0$)

Tương tự, ta có: $y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = y(z+x), z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = z(x+y).$

Vậy $P = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2.1 = 2.$