VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CĂN BẬC HAI (TIẾP THEO) – ĐÁP ÁN

Bài 1: Chứng minh rằng: $\sqrt{a}$ là số tự nhiên nếu a là số chính phương và là số vô tỉ nếu a không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Bài 3: Cho $A=\dfrac{6}{2\sqrt{x}+1}$. Tìm các giá trị nguyên của x để:

1) A đạt giá trị lớn nhất.

2) A có giá trị là số nguyên.

Bài 4: Cho $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$. Tìm các giá trị nguyên của x để B đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Bài 1: Dễ thấy nếu $a=x^2\ (x\in\mathbb{N})$ thì $\sqrt{a}=x$ là số tự nhiên.

Xét trường hợp a không là số chính phương. Giả sử $\sqrt{a}$ là số hữu tỉ.

Khi đó ta có $\sqrt{a}=\dfrac{m}{n}\left(m,n\in\mathbb{N};n\neq 0;(m,n)=1\right)$.

Hay $a=\dfrac{m^2}{n^2}\Rightarrow m^2=a.n^2\Rightarrow m^2\vdots n^2$

Mà $(m,n)=1$ nên ta có n=1 hay $a=m^2$ là số chính phương, không thuộc trường hợp đang xét.

Suy ra giả sử sai hay $\sqrt{a}$ là số vô tỉ nếu a không là số chính phương.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2: Giả sử $\sqrt{2}+\sqrt{5}=x$, với x là số hữu tỉ. Khi đó ta có:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2=x^2\Rightarrow 2+5+2\sqrt{2}\sqrt{5}=x^2\Rightarrow 2\sqrt{10}=x^2-7\Rightarrow\sqrt{10}=\frac{x^2-7}{2}.$$

Theo bài trên, do 10 không là số chính phương nên $\sqrt{10}$ là số vô tỉ.

Mà x là số hữu tỉ nên $\frac{x^2-7}{2}$ là số hữu tỉ, ta suy ra điều vô lí.

Vậy giả sử sai hay $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Bài 3: $A=\frac{6}{2\sqrt{x}+1}$.

Điều kiện: $x\ge 0$.

1) Với $x\ge 0$, ta có $2\sqrt{x}+1\ge 1\Rightarrow A=\frac{6}{2\sqrt{x}+1}\le 6$.

Dấu "=" xảy ra khi x=0.

Vậy khi x=0 thì A đạt giá trị lớn nhất là 6.

2) Do x là số nguyên không âm nên theo bài 1, ta xét 2 trường hợp:

TH1: $\sqrt{x}$ là số vô tỉ.

Khi đó $2\sqrt{x}+1$ cũng là số vô tỉ nên A là số vô tỉ, không thỏa mãn đề bài.

TH2: $\sqrt{x}$ là số tự nhiên.

Ta suy ra $2\sqrt{x}+1$ cũng là số tự nhiên và là số lẻ.

Khi đó, do A nhận giá trị nguyên nên $2\sqrt{x}+1$ là ước nguyên dương lẻ của 6.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2\sqrt{x}+1=1\\2\sqrt{x}+1=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=0\\\sqrt{x}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện x là số nguyên).

Vậy các giá trị x cần tìm để A nhận giá trị nguyên là x=0, x=1.

Bài 4: $B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 0\\\sqrt{x}-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\ne 1\end{cases}$

Với x thỏa mãn điều kiện, ta có: $B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}=1+\frac{4}{\sqrt{x}-1}$.

Để B đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{4}{\sqrt{x}-1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó ta phải có $\sqrt{x}-1$ là số dương nhỏ nhất có thể.

Với x=0, ta có $\sqrt{x}-1=-1<0$.

Theo điều kiện $x \neq 1$ nên ta xét $x \geq 2$. Khi đó $\sqrt{x} - 1 \geq \sqrt{2} - 1 > 0$.

Suy ra $B \leq 1 + \dfrac{4}{\sqrt{2} - 1}$. Dấu "=" xảy ra khi x=2.

Vậy khi x=2 thì B đạt giá trị lớn nhất.

VINASTUDY.VN