VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ (PHẦN 2) – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

1) $A=x^3-y^3-3xy$, với $x-y=1$.

2) $B=2\left(x^3-y^3\right)-3\left(x+y\right)^2$, với $x-y=2$.

3) $C=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)$, với $a+b=1$.

Bài giải:

1) Với $x-y=1$, ta có:

$$A=x^3-y^3-3xy=x^3-y^3-3xy\left(x-y\right)=\left(x-y\right)^3=1.$$

2) Với $x-y=2$, ta có:

$$B=2\left(x^3-y^3\right)-3\left(x+y\right)^2=2\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-3\left(x+y\right)^2$$
$$=4\left(x^2+xy+y^2\right)-3\left(x^2+2xy+y^2\right)$$
$$=x^2-2xy+y^2=\left(x-y\right)^2=4.$$

3) Với $a+b=1$, ta có: $\begin{cases}a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab=1-2ab.\\ a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)=1-3ab.\end{cases}$

Suy ra $C=1-3ab+3ab\left(1-2ab\right)+6a^2b^2=1-3ab+\left(3ab-6a^2b^2\right)+6a^2b^2=1.$

Bài 2: Tính giá trị biểu thức $M=\dfrac{x^8+y^8}{x^4y^4}$, với x,y khác 0 thỏa mãn $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4.$

Bài giải:

Ta có: $M=\dfrac{x^8+y^8}{x^4y^4}=\dfrac{x^8}{x^4y^4}+\dfrac{y^8}{x^4y^4}=\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}.$

Theo giả thiết, ta có:

$$4^2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{x}{y}\frac{y}{x}=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2\Rightarrow\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=4^2-2=14.$$

$$\Rightarrow 14^2=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2=\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^2+2\frac{x^2}{y^2}\frac{y^2}{x^2}=M+2\Rightarrow M=14^2-2=194.$$

Bài 3:

1) Chứng minh rằng: $A=2x^2+2x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}.$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\left(x+3\right)\left(x-11\right)+100.$

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C=4x-8-x^2.$

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D=2x^2+9y^2-6xy+6x-12y+35.$

Bài giải:

1) Ta có:

$$A=2x^2+2x+1=2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)=2\left[x^2+2.x.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Do $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\ge 0;\frac{1}{4}>0\Rightarrow A>0,\forall x\in\mathbb{R}.$

2) Ta có:

$$\begin{aligned}B&=(x+3)(x-11)+100\\&=x^2+3x-11x-33+100\\&=x^2-8x+67\\&=x^2-2.x.4+4^2+67-4^2=(x-4)^2+51\ge 51,\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 51, đạt được khi x = 4.

3) Ta có:

$$C=4x-8-x^2=-\left(x^2-4x+8\right)=-\left[(x-2)^2+4\right]=-(x-2)^2-4\le -4,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2.$

Vậy giá trị lớn nhất của C là -4, đạt được khi x = 2.

4) Ta có:

$$\begin{aligned}D&=2x^2+9y^2-6xy+6x-12y+35\\&=\left(9y^2-6xy+x^2\right)+x^2+6x-12y+35\\&=(3y-x)^2-12y+6x+x^2+35\\&=(3y-x)^2-12y+4x+x^2+2x+35\\&=(3y-x)^2-4(3y-x)+4+x^2+2x+1+35-4-1\\&=(3y-x-2)^2+(x+1)^2+30\ge 30,\forall x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(3y-x-2)^2=0.\\(x+1)^2=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1.\\y=\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của D là 30, đạt được khi $x=-1;y=\frac{1}{3}.$

Bài 4: Tìm các số a, b, c thỏa mãn: $\begin{cases}a+b+c=3.\\(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca).\end{cases}$

Bài giải:

Ta có:

$(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca). \Rightarrow (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = 3ab+3bc+3ca.$

$\Rightarrow a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 = 3ab+3bc+3ca.$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0.$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0 \Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0.$

Mà $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c.$

Kết hợp với $a+b+c = 3,$ ta có: $a = b = c = 1.$

VINASTUDY.VN