VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Chứng minh rằng:

1) $x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$.

2) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2=4(a^2+b^2+c^2)$.

3) $(2a+2b-c)^2+(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2=9(a^2+b^2+c^2)$.

Bài 2: Tìm các số *x*, *y*, *z* thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2+2y^2+5z^2-2xy-4xz+4yz+2y-4z=-5.$$

Bài 3:

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=3x^2+2y^2+z^2+2xy-2yz-2zx+4x-6y$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=x^2+2y^2-2xy+2x-10y+20$.

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $C=-x^2+2xy-3y^2+2x+10y-10$.

Bài 4: Cho $a,b,c\neq 0$ thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$.

Lời giải:

Bài 1:

1) Ta có:

$$\begin{aligned}x^4+y^4+(x+y)^4&=x^4+y^4+(x^2+2xy+y^2)^2\\&=x^4+y^4+(x^4+y^4+4x^2y^2+2x^2.2xy+2y^2.2xy+2x^2y^2)\\&=2x^4+2y^4+6x^2y^2+4x^3y+4xy^3\\&=2(x^4+y^4+3x^2y^2+2x^3y+2xy^3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(x^2+xy+y^2)^2&=2(x^4+x^2y^2+y^4+2x^2.xy+2y^2.xy+2x^2y^2)\\&=2(x^4+y^4+3x^2y^2+2x^3y+2xy^3).\end{aligned}$$

Do đó $x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$.

2) Đặt $a+b+c=m$. Ta có:

$$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2=m^2+(m-2a)^2+(m-2b)^2+(m-2c)^2$$

$$=m^2+m^2-4ma+4a^2+m^2-4mb+4b^2+m^2-4mc+4c^2$$

$$=4m^2-4m(a+b+c)+4(a^2+b^2+c^2)$$

$$=4m^2-4m.m+4(a^2+b^2+c^2)=4(a^2+b^2+c^2)$$

3) Tương tự ý 2).

Bài 2: Ta có:

$$\begin{aligned}&x^2+2y^2+5z^2-2xy-4xz+4yz+2y-4z=-5.\\&\Rightarrow\left(x^2+y^2+4z^2+2.(-x).y+2.(-x).2z+2.y.2z\right)+y^2+z^2+2y-4z+5=0\\&\Rightarrow(-x+y+2z)^2+\left(y^2+2y+1\right)+\left(z^2-4z+4\right)=0\\&\Rightarrow(-x+y+2z)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=0.\end{aligned}$$

Mà $(-x+y+2z)^2\ge 0;(y+1)^2\ge 0;(z-2)^2\ge 0$ nên ta có: $(-x+y+2z)^2=(y+1)^2=(z-2)^2=0.$

Do đó ta có: $\begin{cases}y=-1\\z=2\\x=y+2z=-1+2.2=3.\end{cases}$

Vậy các số x, y, z cần tìm là $x=3; y=-1; z=2.$

Bài 3:

1) Ta có:

$$\begin{aligned}A&=3x^2+2y^2+z^2+2xy-2yz-2zx+4x-6y\\&=\left(x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx\right)+2x^2+y^2+4x-6y\\&=(x+y-z)^2+2x^2+4x+2+y^2-6y+9-11\\&=(x+y-z)^2+2(x+1)^2+(y-3)^2-11\ge -11.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y-z)^2=0\\(x+1)^2=0\\(y-3)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\\z=x+y=2\end{cases}$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là -11 khi $x=-1, y=3, z=2.$

2) Ta có:

$$\begin{aligned}B&=x^2+2y^2-2xy+2x-10y+20\\&=\left(x^2+y^2+1-2xy+2x-2y\right)+y^2-8y+16+20-1-16\\&=(x-y+1)^2+(y-4)^4+3\ge 3.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y+1)^2=0\\(y-4)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4.\\x=y-1=3.\end{cases}$

Vậy B đạt giá trị nhỏ nhất là 3 khi $x=3, y=4.$

3) Ta có:

$$\begin{aligned}-C &= x^2-2xy+3y^2-2x-10y+10\\ &=\left(x^2+y^2+1-2xy-2x+2y\right)+2y^2-12y+9\\ &=(x-y-1)^2+2\left(y^2-6y\right)+9\\ &=(x-y-1)^2+2\left(y^2-6y+9\right)+9-2.9\\ &=(x-y-1)^2+2(y-3)^2-9\ge -9.\end{aligned}$$

Do đó $C\le 9.$ Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y-1)^2=0\\ (y-3)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3.\\ x=y+1=4.\end{cases}$

Vậy C đạt giá trị lớn nhất là 9 khi $x=4, y=3.$

Bài 4: Do $a+b+c=0$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}\\ &=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.\end{aligned}$$

Do đó $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|.$

VINASTUDY.VN