VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

SỐ CHÍNH PHƯƠNG (PHẦN 1) – ĐÁP ÁN

Bài 1: Tìm số tự nhiên n sao cho các số sau là số chính phương:

a) $n(n+3)$ b) $13n+3$

c) $n^2+n+1589$

Bài giải:

a) Đặt: $n(n+3)=a^2$ (với $a\in\mathbb{N}$)

$\Rightarrow n^2+3n=a^2$
$\Leftrightarrow 4n^2+12=4a^2$
$\Leftrightarrow (4n^2+12n+9)-9=4a^2$
$\Leftrightarrow (2n+3)^2-4a^2=9$
$\Leftrightarrow (2n+3-2a)(2n+3+2a)=9$

Ta thấy $2n+3+2a>2n+3-2a$ và chúng là những số nguyên dương

$\Rightarrow (2n+3+2a)(2n+3-2a)=9.1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2n+3+2a=9\\2n+3-2a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=1\\a=2\end{cases}$

b) Đặt: $13n+3=y^2$ (với $y\in\mathbb{N}$)

$\Rightarrow 13(n-1)=y^2-16$
$\Leftrightarrow 13(n-1)=(y+4)(y-4)$

$\Rightarrow (y+4)(y-4)\,\vdots\,13$ mà 13 là số nguyên tố nên $y+4\,\vdots\,13$ hoặc $y-4\,\vdots\,13$

$\Rightarrow y=13k\pm4$ (với $k\in\mathbb{N}$)

$\Rightarrow 13(n-1)=(13k\pm4)^2-16=13k(13k\pm8)$

$\Rightarrow n=13k^2\pm8k+1$

Vậy $n=13k^2\pm8k+1$ (với $k\in\mathbb{N}$) thì $13n+13$ là số chính phương.

c) Đặt: $n^2+n+1589=m^2$ (với $m\in\mathbb{N}$)

$\Rightarrow\left(4n^2+1\right)^2+6355=4m^2$

$\Leftrightarrow(2m+2n+1)(2m-2n-1)=6355$

Ta thấy $2m+2n+1>2m-2n-1>0$ và chúng là những số lẻ.

$\Rightarrow(2m+2n+1)(2m-2n-1)=6355.1=1271.5=205.31=155.41$

Suy ra n có thể có các giá trị sau: 1588; 316; 43; 28

Vậy $n\in$ {1588; 316; 43; 28}

Bài 2: Tìm số tự nhiên n có 2 chữ số biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ đều là số chính phương.

Bài giải:

Ta có: $10\le n\le 99$ nên $21\le 2n+1\le 199$

Tìm số chính phương lẻ trong khoảng trên ta được 2n + 1 bằng 25; 49; 81; 121; 169 tương ứng với số n bằng 12; 24; 40; 60; 84.

Số 3n + 1 bằng 37; 73; 121; 181; 253. Chỉ có số 121 là số chính phương.

Vậy n = 40

Bài 3: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2^8+2^{11}+2^n$ là số chính phương.

Bài giải:

Giả sử: $2^8+2^{11}+2^n=a^2$ (với $a\in\mathbb{N}$) thì:

$2^n=a^2-48^2=(a+48)(a-48)$

$2^p.2^q=(a+48)(a-48)$ với $p,q\in\mathbb{N}$; $p+q=n$ và $p>q$

$\Rightarrow\begin{cases}a+48=2^p\\a-48=2^q\end{cases}\Rightarrow 2^p-2^q=96\Leftrightarrow 2^q.\left(2^{p-q}-1\right)=2^5.3$

Do đó: $q=5$ và $p-q=2\Rightarrow p=7$

$\Rightarrow n=5+7=12$

Thử lại ta có: $2^8+2^{11}+2^{12}=80^2$ (thỏa mãn)

Vậy n = 12

Bài 4: Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho $x+56$ và $x+113$ đều là số chính phương.

Bài giải:

Đặt: $x+56=a^2$; $x+113=b^2$ (với $a,b\in\mathbb{N}$)

Ta có: $b^2-a^2=(x+113)-(x+56)$

$\Rightarrow(b-a)(b+a)=57$

Vì $a,b\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow(b-a)(b+a)\in$ Ư(57) = {1; 3; 19; 57}

Và b + a > b – a nên ta có bảng sau:

b – a	1	3
b + a	57	19
b	29	11
a	28	8
x	728	8

Vậy $x\in\{8;728\}$

<u>Bài 5:</u> Chứng minh rằng tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Bài giải:

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là:a , a + 1, a + 2, a + 3 (với a $\in$N)

Xét: A = a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) = 4a + 6

Vì (4a + 6) $\vdots$ 2 mà (4a + 6) $\not\vdots$ 4 nên A không phải là số chính phương.

<u>Bài 6:</u> Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

Bài giải:

Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là n, n + 1, n+ 2, n + 3 (n $\in$N). Ta có

n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n.(n + 3(n + 1)(n + 2) + 1

$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ (*)

Đặt $n^2 + 3n = t$ (t $\in$ N) thì (*) = $t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

$= (n^2 + 3n + 1)^2$

Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$ Vậy $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

Bài 7: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương .

Bài giải:

$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2)$

$4.S = 1.2.3.(4-0)+ 2.3.4.(5 - 1) + 3.4.5.(6 - 2) + \ldots + k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k +1)]$

$4.S=1.2.3.4-0+2.3.4.5-1.2.3.4+3.4.5.6-2.3.4.5+k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)$

$= (k-1)k(k+1)(k+2)$

$\Rightarrow 4.S + 1 = (k-1)k(k+1)(k+2) + 1$

Theo kết quả của bài trước suy ra $(k-1)k(k+1)(k+2) + 1$ là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh rằng tổng các bình phương của 5 số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương

Bài giải:

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp đó là $n-2, n-1, n , n+1 , n+2$ ($n \in N$, $n \geq 2$).

Ta có $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5.(n^2+2)$

Vì n^2 không thể tận cùng bởi 3 hoặc 8 do đó n^2+2 không thẻ chia hết cho 5

$\Rightarrow 5.(n^2+2)$ không là số chính phương hay A không là số chính phương

Bài 9: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là một số chính phương.

Bài giải:

a và b lẻ nên $a = 2k+1$, $b = 2m+1$ (Với $k, m \in N$)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$

$= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4t + 2$ (Với $t \in N$)

$4t + 2$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên $a^2 + b^2$ không là số chính phương.

VINASTUDY.VN