VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
SỐ CHÍNH PHƯƠNG (PHẦN 2) – ĐÁP ÁN

______www.vinastudy.vn______

Bài 1: Cho F = $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}$. Chứng minh rằng 2F + 3 không là số chính phương.

Bài giải:

Ta có: F = $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}$

3F = $3^2+3^3+3^4+...+3^{101}$

$\Rightarrow$ 3F – F = $(3^2+3^3+3^4+...+3^{101})-(3^1+3^2+3^3+...+3^{100})$

2F = $3^{101}-3^1$

$\Rightarrow$2F + 3 = 3^{101} = $\left(3^4\right)^{25}.3=81^{25}.3=...3$

Vậy 2F + 3 có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

Bài 2: Cho A = $2^2+2^3+2^4+...+2^{20}$. Chứng minh rằng A + 4 không là số chính phương.

Bài giải:

A = $2^2+2^3+2^4+...+2^{20}$

$\Rightarrow$ 2A = $2^3+2^4+2^5+...+2^{21}$

2A – A = $(2^3+2^4+2^5+...+2^{21})-(2^2+2^3+2^4+...+2^{20})$

A = $2^{21}-2^2$ = $2^{21}-4$

$\Rightarrow$A + 4 = $2^{21}=2^{20}.2=\left(2^4\right)^5.2=16^5.2=...6.2=...2$

Vậy chữ số tận cùng của A + 4 là 2 nên A + 4 không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi số $k\in\mathbb{N}$ thì số: A = $1+9^{2k}+77^{2k}+1977^{2k}$ không phải là số chính phương.

Bài giải:

Bất kỳ số chính phương nào cũng có dạng: $3n$ hoặc $3n+1$ với $n\in\mathbb{N}$

Ta có: A = $1+9^{2k}+77^{2k}+1977^{2k}$ có dạng: $3t+2$ với $t\in\mathbb{N}$

Do đó: A không phải là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng với mọi số $m\in\mathbb{N}$ thì số: A = $1+9^{2m}+80^{2m}+1980^{2m}$ không là số chính phương.

Bài giải:

Bất kỳ số chính phương nào cũng có dạng: $4n$ hoặc $4n+1$ với $n\in\mathbb{N}$

Ta có: A = $1+9^{2m}+80^{2m}+1980^{2m}$ có dạng: $4q+2$ với $q\in\mathbb{N}$

Suy ra: A không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh: $n^7+34n+5$ không là số chính phương.

Bài giải:

Bổ đề: $x^2\equiv i$ (mod 7) với $i\in$ {0; 1; 2; 4}

Theo định lý Fermat ta có: $n^7\equiv n$ (mod 7)

$\Rightarrow n^7+34n+5\equiv 35n+5$ (mod 7)

$\Rightarrow n^7+34n+5\equiv 6$ (mod 7_

Giả sử: $n^7+34n+5=x^2$ (với $x\in\mathbb{N}$)

Suy ra: $x^2\equiv 5$ (mod 7) (vô lý)

Vậy $n^7+34n+5$ không thể là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh rằng số A = $4n^4+4n^3+6n^2+3n+2$ (với $n\in\mathbb{Z}$) không thể là số chính phương.

Bài giải:

Ta có: $n^2+n+1=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$3n^2+n+2=3.\left(n+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{12}>0$

Nên

$\left(4n^4+4n^3+6n^2+3n+2\right)-\left(n^2+n+1\right)<4n^4+4n^3+6n^2+3n+2<\left(4n^4+4n^3+6n^2+3n+2\right)+\left(3n^2+n+2\right)$

Hay $4n^4+4n^3+5n^2+2n+1<$ A $<4n^4+4n^3+9n^2+4n+4$

Hay $\left(2n^2+n+1\right)^2<$ A $<\left(2n^2+n+2\right)^2$

Vậy A không thể là số chính phương.

Bài 7: Tích của hai số tự nhiên liên tiếp, của hai số chẵn liên tiếp hoặc 2 số lẻ liên tiếp có thể là số chính phương không ?

Bài giải:

+) Ta chứng minh với hai số tự nhiên liên tiếp:

Ta có: $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ với $\forall n \in \mathbb{N}$

Do đó: $n(n+1)$ không thể là số chính phương.

+) Ta chứng minh với hai số chẵn liên tiếp:

Gọi $a = 2k(2k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $(2k)^2 < a < (2k+1)^2$

Do đó: a không thể là số chính phương.

+) Ta chứng minh với hai số lẻ liên tiếp

Gọi $b = (2k+1)(2k+3)$ (với $k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $(2k+1)^2 < (2k+1)(2k+3) < (2k+3)^2$

Do đó: b không thể là số chính phương.

Bài 8: Cho A = $n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120$, với $n \in \mathbb{N}$.

a) Phân tích A thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng: A không thể là số chính phương.

Bài giải:

a) Ta có:

$$A = n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120$$
$$= (n^4 + 14n^3 + 49n^2) + (22n^2 + 154n) + 120$$
$$= (n^2 + 7n)^2 + 22(n^2 + 7n) + 120$$
$$= (n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12)$$
$$= (n+2)(n+5)(n+3)(n+4)$$

Vậy A = $(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$

b) Ta có A là tích của 4 số tự nhiên liên tiếp nên A không là số chính phương.

Bổ đề: Chứng minh rằng tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Bài giải:

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n.(n+3(n+1)(n+2)+1$

$$= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \quad (*)$$

Đặt $n^2+3n = t$ $(t \in N)$ thì $(*) = t(t+2)+1 = t^2+2t+1 = (t+1)^2$

$$= (n^2+3n+1)^2$$

Vì $n \in N$ nên $n^2+3n+1 \in N$ Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương.

VINASTUDY.VN