VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN (PHẦN 1) – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: CMR với số tự nhiên n bất kỳ ta có

a) $(n+45)(4n^2-1)$ chia hết cho 3 b) $n(n+5)(16n^2+2)$ chia hết cho 3

Bài giải:

a) $(n+45)(4n^2-1)$

+) Với n chia hết cho 3 thì $n+45$ cũng chia hết cho 45.

$\Rightarrow (n+45)(4n^2-1)$ chia hết cho 3.

+) Với n chia cho 3 dư 1 thì n có dạng: 3k + 1

Khi đó: $4n^2-1=4.(3k+1)^2-1=4.(9k^2+6k+1)-1=36k^2+24k+4-1=36k^2+24k+3$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n+45)(4n^2-1)$ chia hết cho 3.

+) Với n chia cho 3 dư 2 thì n có dạng: 3k + 2

Khi đó: $4n^2-1=4.(3k+2)^2-1=4.(9k^2+12k+4)-1=36k^2+48k+15$ chia hết cho 3.

Vậy với mọi số tự nhiên n bất kỳ thì $(n+45)(4n^2-1)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n+45)(4n^2-1)$ chia hết cho 3.

b) $n(n+5)(16n^2+2)$

Làn tương tự câu a.

Bài 2: Tính tổng các số n có 2 chữ số biết rằng $4^n-1\vdots 5$.

Bài giải:

+) Với n là số tự nhiên lẻ n có dạng: 2k + 1

Khi đó ta được: $4^n - 1 = 4^{2k+1} - 1 = \left(4^2\right)^k.4 - 1 = 16^k.4 - 1 = \overline{...6}.4 - 1 = \overline{...4} - 1 = \overline{...3}$ không chia hết cho 5.

+) Với n là số tự nhiên chẵn n có dạng: 2k.

Khi đó ta được: $4^n - 1 = 4^{2k} - 1 = \left(4^2\right)^k - 1 = 16^k - 1 = \overline{...6} - 1 = \overline{...5}$ chia hết cho 5.

Vậy để $4^n - 1 \vdots 5$ thì n phải là số chẵn.

Mà n là số tự nhiên có hai chữ số nên n $\in$ {10; 12; 14; 16; ....; 98}

Tổng các chữ số n có hai chữ số thỏa mãn đề bài là: (98 + 10).45 : 2 = 2430.

Bài 3: Tìm số nguyên dương n biết rằng $4^n + 9^{n-1}$ là số nguyên tố.

Bài giải:

$4^n + 9^{n-1}$

+) Với n là số lẻ thì n có dạng: 2k + 1

Khi đó ta được:

$$4^n + 9^{n-1} = 4^{2k+1} + 9^{2k+1-1} = \left(4^2\right)^k.4 + \left(9^2\right)^k = 16^k.4 + 81^k = \overline{...6}.4 + \overline{...1} = \overline{...4} + \overline{...1} = \overline{...5}$$

Chia hết cho 5 nên không là số nguyên tố (loại)

+) Với n là số chẵn thì n có dạng: 2k

Khi đó ta được: $4^n + 9^{n-1} = 4^{2k} + 9^{2k-1} = \overline{...6} + \overline{...9} = \overline{...5}$ chia hết cho 5 nên không là số nguyên tố (loại)

Vậy không có giá trị nào nguyên dương của n để $4^n + 9^{n-1}$ là số nguyên tố.

Bài 4: Cho số tự nhiên k và n.

a) Chứng minh rằng $A = 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k}$ không chia hết cho 5

b) Chứng minh rằng $B = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5 khi n không chia hết cho 4.

Bài giải:

a) $A = 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} = 1^k + 16^k + 81^k + 256^k = \overline{...1} + \overline{...6} + \overline{...1} + \overline{...6} = \overline{...4}$ không chia hết cho 5.

b) $B = 1^n + 2^n + 3^k + 4^n$

Với n chia hết cho 4 thì n có dạng: 4k

Khi đó ta được:

$B = 1^n + 2^n + 3^k + 4^n = 1^{4k} + 2^{4k} + 3^{4k} + 4^{4k} = 1^k + 16^k + 81^k + 256^k = \overline{...1} + \overline{...6} + \overline{...1} + \overline{...6} = \overline{...4}$ không chia hết cho 5.

Vậy để B chia hết cho 5 thì n phải không chia hết cho 4.

Bài 5: a) Chứng minh rằng $3^n - 1$ chia hết cho 8 với mọi số tự nhiên chẵn n.

b) Chứng minh rằng $3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên lẻ n

Bài giải:

a) Với n là số tự nhiên chẵn thì n có dạng: 2k (với k $\in \mathbb{N}$)

Khi đó ta được: $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$

Ta có: $9 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow 9^k \equiv 1 \pmod 8$

Hay $9^k - 1 \equiv 0 \pmod 8$

Vậy $3^n - 1$ chia hết cho 8 với mọi số tự nhiên chẵn n.

b) Với n là số tự nhiên lẻ thì n có dạng: 2k + 1 (với k $\in \mathbb{N}$)

Khi đó ta được:

$3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 3^{2.(2k+1)+3} + 2^{4.(2k+1)+1} = 3^{4k+5} + 2^{8k+5} = 3^{4k}.3^5 + 2^{8k}.2^5 = 81^k.243 + 256^k.32$

Ta có: $81 \equiv 6 \pmod{25}$

$\Rightarrow 81^k \equiv 6^k \pmod{25}$

$256^k \equiv 6^k \pmod{25}$

Do đó: $81^k.243 + 256^k.32 \equiv 6^k.243 + 6^k.32 = 6^k.275 \equiv 0 \pmod{25}$

Vậy $3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên lẻ n.

Bài 6: Cho n là số nguyên dương bất kỳ. CMR $A = 3^n + 2.17^n$ không là một số chính phương

Bài giải:

$A = 3^n + 2.17^n$

n là số nguyên dương bất kỳ nên n có dạng: 4k ; 4k + 1; 4k + 2; 4k + 3 (với k $\in \mathbb{N}$)

+) Với n = 4k ta được: A = $3^{4k} + 2.17^{4k} = 81^k + 2.2401^k = \overline{...1} + 2 \times \overline{...1} = \overline{...3}$ (không là số chính phương)

+) Với n = 4k + 1 ta được:

A = $3^{4k+1} + 2.17^{4k+1} = 81^k.3 + 2.2401^k.17 = \overline{...1} \times 3 + 2 \times \overline{...1} \times 17 = \overline{...3} + \overline{...4} = \overline{...7}$ (không là số chính phương)

+) Với n = 4k +2 ta được:

A= $3^{4k+2} + 2.17^{4k+2} = 81^k.3^2 + 2.2401^k.17^2 = \overline{...1} \times 9 + 2 \times \overline{...1} \times 289 = \overline{...9} + \overline{...8} = \overline{...7}$ (không là số chính phương)

+) Với n = 4k + 3 ta được:

A = $3^{4k+3} + 2.17^{4k+3} = 81^k.3^3 + 2.2401^k.17^3 = \overline{...1} \times 27 + 2 \times \overline{...1} \times 4913 = \overline{...7} + \overline{...6} = \overline{...3}$ (không là số chính phương)

Vậy n là số nguyên dương bất kỳ thì $A = 3^n + 2.17^n$ không là một số chính phương

VINASTUDY.VN