VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ CHIA HẾT CỦA SỐ NGUYÊN (PHẦN 2) – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Cho n là số tự nhiên

a) Chứng minh: $6^{2n+1}+5^{n+2}$ chia hết cho 31

b) CMR số $M=21^{2n+1}+17^{2n+1}+15$ không chia hết cho 19

Bài giải:

a) $6^{2n+1}+5^{n+2}=36^n.6+5^n.25$

Ta có: $36\equiv 5$ (mod 31)

$\Rightarrow 36^n\equiv 5^n$ (mod 31)

Suy ra: $36^n.6+5^n.25\equiv 5^n.6+5^n.25=5^n.\left(6+25\right)=5^n.31\equiv 0$ (mod 31)

Vậy $6^{2n+1}+5^{n+2}$ chia hết cho 31

b) $M=21^{2n+1}+17^{2n+1}+15=21^{2n}.21+17^{2n}.17+15=441^n.21+289^n.17+15$

Ta có: $441\equiv 4$ (mod 19)

$\Rightarrow 441^n\equiv 4^n$ (mod 19)

$289\equiv 4$ (mod 19)

$\Rightarrow 289^n\equiv 4^n$ (mod 19)

Suy ra: $441^n.21+289^n.17+15\equiv 4^n.21+4^n.17+15=4^n.38+15\equiv 15$ (mod 19)

Do đó: $M=21^{2n+1}+17^{2n+1}+15$ không chia hết cho 19.

Bài 2: Tìm các số tự nhiên $n<150$ biết 7^n+8^n chia hết cho 5

Bài giải:

7^n+8^n

n là số tự nhiên nên n có dạng: 4k ; 4k + 1; 4k + 2; 4k + 3 (với k $\in\mathbb{N}$)

+) Với n = 4k. Khi đó ta được: $7^n+8^n=7^{4k}+8^{4k}=2401^k+4096^k=\overline{...1}+\overline{...6}=\overline{...7}$ không chia hết cho 5.

+) Với n = 4k + 1. Khi đó ta được:

$7^n+8^n=7^{4k+1}+8^{4k+1}=2401^k.7+4096^k.8=\overline{...1}\times 7+\overline{...6}\times 8=\overline{...7}+\overline{...8}=\overline{...5}$ chia hết cho 5.

+) Với n = 4k + 2. Khi đó ta được:

$7^n+8^n=7^{4k+2}+8^{4k+2}=2401^k.7^2+4096^k.8^2=\overline{...1}\times 49+\overline{...6}\times 64=\overline{...9}+\overline{...4}=\overline{...3}$ không chia hết cho 5.

+) Với n = 4k + 3. Khi đó ta được:

$7^n+8^n=7^{4k+3}+8^{4k+3}=2401^k.7^3+4096^k.8^3=\overline{...1}\times 343+\overline{...6}\times 512=\overline{...3}+\overline{..2}=\overline{...5}$ chia hết cho 5.

Vậy các số tự nhiên n có dạng: 4k + 1; 4k + 3 thì 7^n+8^n chia hết cho 5.

Bài 3: Chứng minh rằng:

a) $A=220^{119^{69}}+119^{69^{220}}+69^{220^{119}}$ chia hết cho 102.

b) $B=1890^{1930}+1945^{1975}+1$ chia hết cho 7

c) CMR: $0,3.(1983^{1983}-1917^{1917})$ là một số nguyên

Bài giải:

a) $A=220^{119^{69}}+119^{69^{220}}+69^{220^{119}}$

+) Ta có: 220 ≡ 0 (mod 2)

$\Rightarrow 220^{119^{69}}\equiv 0\ (\text{mod } 2)$

119 ≡ 1 (mod 2) $\Rightarrow 119^{69^{220}}\equiv 1\ (\text{mod } 2)$

$69\equiv 1\ (\text{mod } 2)\Rightarrow 69^{220^{119}}\equiv 1\ (\text{mod } 2)$

Suy ra: $220^{119^{69}}+119^{69^{220}}+69^{220^{119}}\equiv 0+1+1\equiv 0\ (\text{mod } 2)$ (1)

+) Ta có: 220 ≡ 1 (mod 3) $\Rightarrow 220^{119^{69}}\equiv 1\ (\text{mod } 3)$

Nhận thấy: $69\equiv 1\ (\text{mod } 2)$ nên $69^{220}\equiv 1\ (\text{mod } 2)$

Hay 69^{220} là số lẻ và có dạng: 2k + 1

Khi đó ta được: $119^{69^{220}} = 119^{2k+1} = 119^{2k}.119 \equiv 2^{2k}.2 \equiv 4^k.2 \equiv 2 \pmod 3$

$69 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 69^{220^{119}} \equiv 0 \pmod 3$

Suy ra: $220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} \equiv 1 + 2 + 0 \equiv 0 \pmod 3$ (2)

+) Ta có: Nhận thấy: $119 \equiv 1 \pmod 2$ nên $119^{69} \equiv 1 \pmod 2$

Hay 119^{69} là số lẻ và có dạng: 2n + 1

Khi đó ta được: $220^{119^{69}} = 220^{2n+1} = 220^{2n}.220 \equiv 1.220 \equiv 16 \pmod{17}$

$119 \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 119^{69^{220}} \equiv 0 \pmod{17}$

$69 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 69^{220^{119}} \equiv 1 \pmod{17}$

Suy ra: $220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}} \equiv 16 + 0 + 1 \equiv 0 \pmod{17}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $A = 220^{119^{69}} + 119^{69^{220}} + 69^{220^{119}}$ chia hết cho 102.

b) $B = 1890^{1930} + 1945^{1975} + 1$ chia hết cho 7

Ta có: $1890 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 1890^{1930} \equiv 0 \pmod 7$

$1945 \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow 1945^2 \equiv 6^2 \equiv 1 \pmod 7$

$\Rightarrow \left(1945^2\right)^{987}.1945 \equiv 1.1945 \equiv 1.6 \equiv 6 \pmod 7$

Suy ra: $B = 1890^{1930} + 1945^{1975} + 1 \equiv 0 + 6 + 1 \equiv 0 \pmod 7$

Vậy $B = 1890^{1930} + 1945^{1975} + 1$ chia hết cho 7

Bài 4: Cho A = $n^3 + 6n^2 + 8n$; Chứng minh rằng A chia hết cho 48 với mọi n chẵn

Bài giải:

A = $(n^3 + 6n^2 + 8 = n\left(n^2 + 6n + 8\right)$. Thay n chẵn với $n = 2k$ vào A ta được: (k $\in$N)

A = $2k\left(4k^2 + 6.2k + 8\right) = 2k\left(4k^2 + 12k + 8\right) = 8k\left(k^2 + 3k + 2\right) = 8k^2\left(k^2 + 2k + k + 2\right) = 8k^2(k+1)(k+2)$

Vì $k(k+1)(k+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ chia hết cho 3 (sử dụng nguyên lý Dirichlet)

$k(k+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $k(k+1)$ chia hết cho 2.

Do đó: $k(k+1)(k+2) \vdots 6$

Vậy $A \vdots (6.8)$ hay $A \vdots 48$

Bài 5: Tìm n $\in$ Z để giá trị của A = n^3+2n^2-3n+2 chia hết cho giá trị của biểu thức B = $n^2 - n$

Bài giải:

Chia A cho B ta có: $n^3 + 2n^2 - 3n + 2 = (n + 3)(n^2 - n) + 2$

Để A chia hết cho B thì 2 phải chia hết cho $n^2 - n = n(n - 1)$ do đó 2 chia hết cho n, ta có:

n	1	- 1	2	- 2
n - 1	0	- 2	1	- 3
n(n - 1)	0	2	2	6
	loại			loại

Vậy: Để giá trị của biểu thức A = $n^3 + 2n^2 - 3n + 2$ chia hết cho giá trị của biểu thức

Bài 6: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $n^2+2n-4 \vdots 11$ b) $2n^3+n^2+7n+1 \vdots 2n-1$

Bài giải:

a) Tách $n^2 + 2n - 4$ thành tổng hai hạng tử trong đó có một hạng tử là B(11)

$n^2 + 2n - 4 \vdots 11 \Leftrightarrow (n^2 - 2n - 15) + 11 \vdots 11 \Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) + 11 \vdots 11$

$$\Leftrightarrow (n - 3)(n + 5) \vdots 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n - 3 \vdots 11 \\ n + 5 \vdots 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = B(11) + 3 \\ n = B(11) - 5 \end{array}\right.$$

b) $2n^3 + n^2 + 7n + 1 = (n^2 + n + 4)(2n - 1) + 5$

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$ thì $5 \vdots 2n - 1$ hay $2n - 1$ là Ư(5)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2n - 1 = -5 \\ 2n - 1 = -1 \\ 2n - 1 = 1 \\ 2n - 1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{array}\right.$$

➔ Vậy: $n \in \{-2, 0, 1, 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 \vdots 2n - 1$

Bài 7: Tìm $n \in N$ sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 7

Bài giải:

Nếu $n = 3k$ ($k \in N$) thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7

Nếu $n = 3k + 1$ ($k \in N$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = BS\ 7 + 1$

Nếu $n = 3k + 2$ ($k \in N$) thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = BS\ 7 + 3$

Vậy: $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi n = BS 3

Bài 8. Tìm $n \in N$ để:

a) $3^n - 1$ chia hết cho 8

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1}$ chia hết cho 25

c) $5^n - 2^n$ chia hết cho 9

Bài giải:

a) Khi $n = 2k$ ($k \in N$) thì $3^n - 1 = 3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ chia hết cho $9 - 1 = 8$

Khi $n = 2k + 1$ ($k \in N$) thì $3^n - 1 = 3^{2k+1} - 1 = 3.(9^k - 1) + 2 = BS\ 8 + 2$

➔ Vậy : $3^n - 1$ chia hết cho 8 khi $n = 2k$ ($k \in N$)

b) $A = 3^{2n+3} + 2^{4n+1} = 27 . 3^{2n} + 2.2^{4n} = (25 + 2) 3^{2n} + 2.2^{4n}$

$= 25. 3^{2n} + 2.3^{2n} + 2.2^{4n} = BS\ 25 + 2(9^n + 16^n)$

Nếu $n = 2k + 1$($k \in N$) thì $9^n + 16^n = 9^{2k+1} + 16^{2k+1}$ chia hết cho $9 + 16 = 25$

Nếu $n = 2k$ ($k \in N$) thì 9^n có chữ số tận cùng bằng 1 , còn 16^n có chữ số tận cùng bằng 6 $\rightarrow$suy ra $2((9^n + 16^n)$ có chữ số tận cùng bằng 4 nên A không chia hết cho 5 ➔ nên không chia hết cho 25

c) Nếu $n = 3k$ ($k \in N$) thì $5^n - 2^n = 5^{3k} - 2^{3k}$ chia hết cho $5^3 - 2^3 = 117$

$\rightarrow$ nên chia hết cho 9

Nếu $n = 3k + 1$ thì $5^n - 2^n = 5.5^{3k} - 2.2^{3k} = 5(5^{3k} - 2^{3k}) + 3.\ 2^{3k} = BS\ 9 + 3.\ 8^k$

$= BS\ 9 + 3(BS\ 9 - 1)^k = BS\ 9 + BS\ 9 + 3$

Tương tự: nếu $n = 3k + 2$ thì $5^n - 2^n$ không chia hết cho 9

➔ Vậy $5^n - 2^n$ chia hết cho 9 khi $n = 3k$ ($k \in N$)

VINASTUDY.VN