

**VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8**  
**GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG**  
**PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN (PHẦN 2) – ĐÁP ÁN**

[www.vinastudy.vn](http://www.vinastudy.vn)

**Bài 1:** Giải phương trình nghiệm nguyên:  $x^2 - y^2 = 2011$

**Bài giải:**

$$x^2 - y^2 = 2011$$

$$(x - y)(x + y) = 2011$$

Suy ra:  $x - y \in U(2011) = \{1; -1; 2011; -2011\}$

Ta có bảng sau:

$x - y$	1	-1	2011	-2011
$x + y$	2011	-2011	1	-1
$x$	1006	-1006	1006	-1006
$y$	1005	-1005	-1005	1005

Vậy  $(x; y) \in \{(1006; 1005); (-1006; -1005); (1006; -1005); (-1006; 1005)\}$

**Bài 2:** Tìm tất cả các số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $y(x - 1) = x^2 + 2$

(Đề thi vào 10 Chuyên Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội năm 2000)

**Bài giải:**

$$y(x - 1) = x^2 + 2$$

$$y(x - 1) - x^2 = 2$$

$$y(x - 1) - (x^2 - 1) = 3$$

$$y(x - 1) - (x - 1)(x + 1) = 3$$

$$(x - 1)(y - x - 1) = 3$$

$$\Rightarrow x - 1 \in U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}$$

Vậy  $(x; y) \in \{(4; 6); (1; 16); (9; 8); (-8; -11)\}$

**Bài 3:** Tìm nghiệm nguyên không âm của các phương trình sau:

$$(x-1)^2 = y^2 - y + 6$$

**Bài giải:**

$$(x-1)^2 = y^2 - y + 6$$

$$4(x-1)^2 = 4y^2 - 4y + 24$$

$$4(x-1)^2 - (4y^2 - 4y + 1) = 23$$

$$4(x-1)^2 - (2y-1)^2 = 23$$

$$(2x-2+2y-1)(2x-2-2y+1) = 23$$

$$\Rightarrow 2x-2+2y-1 \in \{-1; 1; -23; 23\}$$

Ta có bảng sau:

$2x-2+2y-1$	-1	1	-23	23
$2x-2-2y+1$	-23	23	-1	1
$2x-2$	-12	12	-12	12
$x$	-5 (loại)	7	-5 (loại)	7
$2y-1$		-11		11
$y$		-5 (loại)		6

Vậy  $(x; y) = (7; 6)$

**Bài 4:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức;

$$x^2 - xy - y + 2 = 0$$

(Đề thi THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

**Bài giải:**

$$x^2 - xy - y + 2 = 0$$

$$(x^2 - 1) - y(x+1) = -3$$

$$(x+1)(x-1-y) = -3$$

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(x+1) \in U(-3) = \{1; -1; 3; -3\}$

Ta có bảng sau;

$x+1$	1	-1	3	-3
$x$	0	-2	2	-4
$x-1-y$	-3	3	-1	1
$y$	2	-6	2	-6

Vậy  $(x; y) = \{(0; 2); (-2; -6); (2; 2); (-4; -6)\}$

**Bài 5:** Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức:  $x^2 + 4x + 1 = y^4$

(Đề thi THPT Chuyên Ngoại ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2010 - 2011)

**Bài giải:**

$$x^2 + 4x + 1 = y^4$$

$$(x^2 + 4x + 4) - y^4 = 3$$

$$(x+2)^2 - y^4 = 3$$

$$(x+2-y^2)(x+2+y^2) = 3$$

Mà  $x+2+y^2 > x+2-y^2$  nên  $x+2+y^2 \in \{-1; 3\}$

Ta có bảng sau;

$x+2+y^2$	-1	3
$x+2-y^2$	-3	1
$x+2$	-2	2
$x$	-4	0
$y^2$	1	1
$y$	1 hoặc -1	1 hoặc -1

Vậy  $(x; y) \in \{(-4; -1); (-4; 1); (2; 1); (2; -1)\}$

**Bài 6:** Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $x^2 - y^2 + 3x + 10y - 23 = 0$

**Bài giải:**

$$x^2 - y^2 + 3x + 10y - 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = y^2 - 10y + 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + x + 2 = (y - 5)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 2) = (y - 5)^2$$

Ta có:  $x + 1$ ;  $x + 2$  là hai số tự nhiên liên tiếp.

Mà:  $(y - 5)^2$  là bình phương của 1 số

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$+) \text{ TH1: } x = -1 \text{ khi đó ta được: } 0 = (y - 5)^2$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$$+) \text{ TH2: } x = -2 \text{ khi đó ta được: } 0 = (y - 5)^2$$

$$\Rightarrow y = 5$$

Vậy  $(x; y) \in \{(-1; 5); (-2; 5)\}$

**Bài 7:** Giải phương trình nghiệm nguyên:  $13x + 5y = 175$

**Bài giải:**

$$13x + 5y = 175 \quad (*)$$

$$\text{Ta thấy: } \begin{cases} 175 : 5 \\ 5y : 5 \end{cases} \Rightarrow 13x : 5 \Rightarrow x : 5 \text{ (vì } \text{UCLN}(13, 5) = 1)$$

Đặt  $x = 5t$  (với  $t \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó thay vào phương trình (\*) ta được:

$$13.5t + 5y = 175$$

$$13t + y = 35$$

$$\Rightarrow y = 35 - 13t$$

Vậy phương trình có nghiệm biểu diễn dưới dạng:  $(x, y) = (5t; 35 - 13t)$  (với  $t \in \mathbb{Z}$ )



**Bài 8:** Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau:

a)  $2^x + 2^y + 2^z = 2336$  (với  $x < y < z$ )

b)  $y^2 - 12^2 = 2^x + 3^2$

**Bài giải:**

a)  $2^x + 2^y + 2^z = 2336$  (với  $x < y < z$ )

$$2^x \cdot (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^5 \cdot 73$$

Do  $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$  là số lẻ nên  $2^x = 2^5$

$$\Rightarrow x = 5$$

Khi đó ta được:  $2^{y-x} + 2^{z-x} = 72 = 2^3 \cdot 9 = 2^{y-x} \cdot (1 + 2^{z-y})$

$$\Rightarrow 2^{y-x} = 2^3$$

$$\Rightarrow y - x = 3$$

Mà  $x = 5$  nên  $y = 5 + 3 = 8$

Và  $2^{z-y} = 8 \Rightarrow z - y = 3 \Rightarrow z = 3 + y = 3 + 8 = 11$

Vậy  $(x ; y ; z) = (5; 8; 11)$

b)  $y^2 - 12^2 = 2^x + 3^2$

$$y^2 - 2^x = 153 \quad (*)$$

Với  $x$  là số nguyên dương nên xét các trường hợp:

+) Với  $x$  là số chẵn ta đặt  $x = 2m$

Suy ra:  $y^2 - (2^m)^2 = 153$

$$(y - 2^m)(y + 2^m) = 153 = 153 \cdot 1 = 51 \cdot 3 = 17 \cdot 9$$

Do  $y + 2^m > y - 2^m$  nên  $y + 2^m \in \{153; 51; 17\}$

Ta có bảng sau:

$y + 2^m$	153	51	17
-----------	-----	----	----

$y - 2^m$	1	3	9
$y$	77	27	13
$2^m$	76 (loại)	24 (loại)	4
$m$			2
$x$			4

+) Với  $x$  là số lẻ:

TH1:  $x = 1$  thay vào (1) ta được:

$$y^2 - 2^1 = 153$$

$$y^2 = 155 \text{ (loại)}$$

TH2:  $x \geq 3$  ta đặt  $x = 2m + 1$  khi đó  $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 2^{2m} \cdot 2^1 = 2^{2m+1} \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$y^2 - 2^x = 153$$

$$\text{Mà: } 153 \equiv 0 \pmod{3}$$

Suy ra:  $y^2 \equiv 2 \pmod{3}$  (vô lý)

$$\text{Vậy } (x; y) = (4; 13)$$

**Bài 9:** Tìm nghiệm nguyên của phương trình:  $7(x^2 + xy + y^2) = 39(x + y)$

**Bài giải;**

Ta có:  $7(x^2 + xy + y^2):7$  nên  $39(x + y):7$

Mà ƯCLN(39, 7) = 1 nên  $(x + y):7$

Đặt:  $x + y = 7k$  (với  $k \in \mathbb{Z}$ ) khi đó ta được:

$$x^2 + xy + y^2 = 39k$$

$$\text{Ta có: } xy = (x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = (7k)^2 - 39k = 49k^2 - 39k$$

$$\text{Do: } (x + y)^2 \geq 4xy \text{ nên } 49k^2 \geq 4(49k^2 - 39k)$$

$$\Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{52}{49}$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ hoặc } k = 1$$

$$\Rightarrow (x; y) \in \{(0; 0); (5; 2); (2; 5)\}$$

VINASTUDY.VN