

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA BIỂU THỨC BẬC CAO VÀ ĐA THỨC NHIỀU BIẾN – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn**Bài 1:** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = -x^2 + x + 1$ **Bài giải:**Ta có: $A = -x^2 + x + 1$

$$\Rightarrow A = -\left[x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right]$$

$$\Rightarrow A = -\left[x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]$$

$$\Rightarrow A = -\left[x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow A = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$\text{Mà: } -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4} \quad \forall x$$

$\Rightarrow A$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{5}{4}$ dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Bài 2: Tính giá trị nhỏ nhất của đa thức: $Q = 2x^2 - 6x$?**Bài giải:**

$$Q = 2x^2 - 6x$$

$$Q = 2(x^2 - 3x)$$

$$Q = 2\left[x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

$$Q = 2 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right]$$

$$Q = 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{2}$$

$$\text{Mà: } 2 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Suy ra: } 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2} \text{ với mọi } x$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của đa thức } Q \text{ là: } -\frac{9}{2} \text{ khi } x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = (2x + 1)(x - 5)$

Bài giải:

$$C = (2x + 1)(x - 5)$$

$$C = 2x^2 - 10x + x - 5$$

$$C = 2x^2 - 9x - 5$$

$$C = 2 \left(x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{5}{2} \right)$$

$$C = 2 \left(x^2 - 2x \cdot \frac{9}{4} + \frac{81}{16} - \frac{81}{16} - \frac{5}{2} \right)$$

$$C = 2 \left[\left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{121}{16} \right]$$

$$C = 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{121}{8}$$

$$\text{Vì: } 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Suy ra: } 2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{121}{8} \geq -\frac{121}{8} \text{ với mọi } x$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức } C \text{ là: } -\frac{121}{8} \text{ khi } x - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4} .$$

Bài 4: Tính giá trị nhỏ nhất của đa thức: $M = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$?

Bài giải:

$$M = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$$

$$M = \left[x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + [y^2 + 2y \cdot 3 + 3^2] - \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3^2 + 10$$

$$M = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + 3)^2 - \frac{1}{4} - 9 + 10$$

$$M = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + 3)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Mà: } \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x$$

$$(y + 3)^2 \geq 0 \text{ với mọi } y$$

$$\text{Suy ra: } \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + 3)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + 3)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của đa thức } M \text{ là: } \frac{3}{4} \text{ khi } \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = -x^2 - 2y^2 + 2xy - y + 1$ **Bài giải:**

$$Q = -x^2 - 2y^2 + 2xy - y + 1$$

$$Q = -(x^2 + 2y^2 - 2xy + y - 1)$$

$$Q = -(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 2y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1)$$

$$Q = - \left[(x - y)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right]$$

$$Q = - (x - y)^2 - \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$\text{Mà: } - (x - y)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$-(y + \frac{1}{2})^2 \leq 0 \text{ với mọi } y$$

$$\text{Suy ra: } -(x - y)^2 - (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4} \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức Q là: } \frac{5}{4} \text{ khi } \begin{cases} x - y = 0 \\ y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Bài 6: Tìm GTNN của: } A = x(x-3)(x-4)(x-7)$$

Bài giải:

$$A = x(x-3)(x-4)(x-7) = x(x-7)(x-3)(x-4) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$$

Đặt: $x^2 - 7x + 6 = y$ ta được:

$$(y-6)(y+6) = y^2 - 36 \geq -36$$

$$\text{Vậy GTNN của A là } -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Bài 7: Tìm GTNN của biểu thức: } B = (x-1)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$$

Bài giải:

$$\text{Đặt } y = x^2 - 4x + 3 .$$

$$\text{Đáp số: GTNN của biểu thức B là } -1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Bài 8: Tìm GTNN của biểu thức: } A = (x+8)^4 + (x+6)^4$$

Bài giải:

Đặt $y = x + 7$, khi đó ta được:

$$A - 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2$$

$$\text{Vậy GTNN của biểu thức A là } 2 \Leftrightarrow x = -7$$

$$\text{Bài 9: Tìm GTNN của biểu thức: } D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

Bài giải:

$$D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$D = (x^2 - x + 1)^2$$

Đáp số: GTNN của D là: $\frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bài 10: Tìm GTLN của $A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2)$

Bài giải:

Các biểu thức $x^2 - 3x + 1$ và $21 + 3x - x^2$ có tổng không đổi (bằng 22) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi:

$$x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

VINASTUDY.VN