

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA BIỂU THỨC CHỨA MẪU LÀ TAM THỨC BẬC 2 – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Tìm GTNN của $A = \frac{2}{6x-5-9x^2}$

Bài giải:

$$A = \frac{2}{6x-5-9x^2} = \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4}$$

Ta thấy $(3x-1)^2 \geq 0$ nên $(3x-1)^2 + 4 \geq 4$

Do đó: $\frac{1}{(3x-1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$ (theo tính chất $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ với a và b cùng dấu)

$$\Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4} \geq -\frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow A \geq -\frac{1}{2}$$

Vậy GTNN của $A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^2 - x + 2}$.

Bài giải:

$$A = \frac{1}{x^2 - x + 2}$$

$$A = \frac{1}{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$A = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$$

$$\text{Mà: } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \leq \frac{4}{7} \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } A \text{ là: } \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của: } A = \frac{1}{x - 3x^2 + 12}$$

Bài giải:

$$A = \frac{1}{x - 3x^2 + 12}$$

$$A = \frac{1}{-3x^2 + x + 12}$$

$$A = \frac{1}{-3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - 4\right)}$$

$$A = \frac{1}{-3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4\right)}$$

$$A = \frac{1}{-3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{145}{36}\right]}$$

$$A = \frac{1}{-3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{145}{12}}$$

$$\text{Mà: } -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{145}{12} \leq \frac{145}{12} \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{145}{12}} \geq \frac{12}{145} \text{ với mọi } x.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là: $\frac{12}{145} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Bài 4: Tìm GTNN của biểu thức sau: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Bài giải:

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 2x + 1} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2$$

Vậy GTNN của biểu thức A = 2 khi và chỉ khi $x = 2$

Bài 5: Tìm GTLN của $B = \frac{4-x^2}{x^2+1}$

Bài giải:

$$\text{Ta có: } B = \frac{4-x^2}{x^2+1} = \frac{5-(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{5}{x^2+1} - 1 \leq 5-1=4 \quad \forall x$$

Vậy GTLN của biểu thức B là 4 $\Leftrightarrow x = 0$

Bài 6: Tìm GTNN của biểu thức $C = \frac{x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4x + 5}$

Bài giải:

$$C = \frac{x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4x + 5} = \frac{(x^2 - 4x + 5) - 9}{x^2 - 4x + 5} = 1 - \frac{9}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{Do } x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x$$

$$\text{Nên } \frac{1}{(x-2)^2 + 1} \leq 1 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{(x-2)^2 + 1} \geq -9$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{9}{(x-2)^2 + 1} \geq 1 - 9 = -8 \quad \forall x$$

Vậy GTNN của biểu thức $C = -8 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 7: Tìm giá trị của x để biểu thức: $D = \frac{x^2 - 2x + 2013}{x^2}$ (với $x \neq 0$) đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài giải:

$$D = \frac{x^2 - 2x + 2013}{x^2}$$

$$D = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2013}{x^2}$$

Đặt: $\frac{1}{x} = t$

Ta có:

$$\begin{aligned} D &= 2013t^2 - 2t + 1 = 2013 \left(t^2 - 2t \cdot \frac{1}{2013} + \frac{1}{2013^2} \right) - \frac{1}{2013} + 1 \\ &= 2013 \cdot \left(t - \frac{1}{2013} \right)^2 + \frac{2012}{2013} \geq \frac{2012}{2013} \quad \forall t \end{aligned}$$

Vậy GTNN của $D = \frac{2012}{2013} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2013}$ hay $x = 2013$

Bài 8: Tìm giá trị của x để biểu thức: $E = \frac{-x^2 + x - 10}{x^2 - 2x + 1}$ (với $x \neq 1$) đạt giá trị lớn nhất.

Bài giải:

$$E = \frac{-x^2 + x - 10}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-(x^2 - 2x + 1) - (x - 1) - 10}{(x - 1)^2} = - \left(1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{10}{(x - 1)^2} \right)$$

Đặt: $\frac{1}{x - 1} = t$

Ta có:

$$\begin{aligned} E &= -(10t^2 + t + 1) = -10 \left(t^2 + 2t \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} - \frac{1}{400} \right) - 1 \\ &= -10 \left(t + \frac{1}{20} \right)^2 - \frac{39}{40} \leq -\frac{39}{40} \quad \forall t \end{aligned}$$

Vậy GTLN của $E = -\frac{39}{40} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{20}$ hay $x = -19$

