VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

DẠNG 2: CHỨNG MINH 1 ĐA THỨC CHIA HẾT CHO 1 ĐA THỨC KHÁC – ĐÁP ÁN

____www.vinastudy.vn____

Bài 1: Chứng minh rằng $\left(x^{kn}-y^{km}\right)\vdots\left(x^{n}-y^{m}\right)$ với $n,m,k\in N^{*}$?

Bài giải:

Ta có:

$$x^{kn}-y^{km}=\left(x^{n}\right)^{k}-\left(y^{m}\right)^{k}$$

$$=\left(x^{n}-y^{m}\right)\left(\left(x^{n}\right)^{k-1}+\left(x^{n}\right)^{k-2}.y+...+\left(y^{m}\right)^{k-1}\right)$$

$$=>x^{kn}-y^{km}\vdots\left(x^{n}-y^{m}\right)$$

Bài 2: Chứng minh rằng nếu $\left(x^{n}-y^{n}\right)\vdots\left(x^{m}-y^{m}\right)$ và $n,m\in N^{*}$ thì $n\vdots m$?

Bài giải:

Đặt $n=mk+r$ trong đó r là dư của phép chia n cho m ($0\le r<m$)

Cần chứng minh rằng r = 0

Ta có:

$$x^{n}-y^{n}=x^{mk+r}-y^{mk+r}=x^{mk+r}-y^{mk}.x^{r}+y^{mk}.x^{r}-y^{mk+r}$$

$$=x^{r}.\left(x^{mk}-y^{mk}\right)+y^{mk}.\left(x^{r}-y^{r}\right)\vdots\left(x^{m}-y^{m}\right)$$

Vì $x^{mk}-y^{mk}=\left(x^{m}\right)^{k}-\left(y^{m}\right)^{k}\vdots\left(x^{m}-y^{m}\right)=>x^{r}.\left(x^{mk}-y^{mk}\right)\vdots\left(x^{m}-y^{m}\right)$

Nên ta có: $y^{mk}.\left(x^{r}-y^{r}\right)\vdots\left(x^{m}-y^{m}\right)(1)$

($+_1$)Giả sử x, y nguyên tố cùng nhau => $\left(x,y\right)=1=>\left(y^{m},x^{m}\right)=1$

=>$\left(y^{m},x^{m}-y^{m}\right)=1=>\left(y^{mk},x^{m}-y^{m}\right)=1$

=> $x^{r}-y^{r}\vdots x^{m}-y^{m}$ (mâu thuẫn)

Nên r = 0

($+_2$) Giả sử x, y có ƯCLN = d

=> $\begin{cases} x = d - x_1 \\ y = d - y_1 \end{cases}$ $(x_1, y_1) = 1$

Thay vào (1) : $d^n.(x_1^n - y_1^n) \vdots d^m(x_1^m - y_1^m)$

=> $d^{n-m}.(x_1^n - y_1^n) \vdots (x_1^m - y_1^m)$

=> $x_1^n - y_1^n \vdots x_1^m - y_1^m$

Bài 3: Chứng minh rằng $f(x) = x^{999} + x^{888} + ... + x^{111} + 1 \vdots g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ... + 1$?

Bài giải:

Xét hiệu: $f(x) - g(x) = (x^{999} - x^9) + (x^{888} - x^8) + ... + (x^{111} - x)$

$= x^9.(x^{990} - 1) + x^8(x^{880} - 1) + ... + x.(x^{110} - 1)$

$= x^9.((x^{10})^{99} - 1) + x^8.((x^{10})^{88} - 1) + ... + x.((x^{10})^{11} - 1)$

Ta có: $(x^{10})^{99} - 1 = (x^{10})^{99} - 1^{99} \vdots (x^{10} - 1)$

$(x^{10})^{88} - 1 = (x^{10})^{88} - 1^{88} \vdots (x^{10} - 1)$

.....

$(x^{10})^{11} - 1 = (x^{10})^{11} - 1^{11} \vdots (x^{10} - 1)$

=> $f(x) - q(x) \vdots x^{10} - 1 = (x-1)(x^9 + x^8 + ... + 1)$

=> $f(x) - q(x) \vdots q(x)$ => $f(x) \vdots q(x)$

Bài 4: Chứng minh rằng: $f(x) = x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 \vdots g(x) = x^2 + x + 1$ với $\forall m, n \in N$?

Bài giải:

Xét hiệu:

$f(x) - g(x) = x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 - x^2 - x - 1$

$= (x^{3m+1} - x) + (x^{3n+2} - x^2)$

$= x.((x^3)^m - 1) + x^2.((x^3)^m - 1)$

$+)\left(x^3\right)^m-1=\left(x^3\right)^m-1^m\vdots\left(x^3-1\right)$

$+)\left(x^3\right)^n-1=\left(x^3\right)^n-1\vdots\left(x^3-1\right)$

=> $f(x)-g(x)\vdots g(x)=x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

=> $f(x)-g(x)\vdots\left(x^2+x+1\right)=g(x)$

=> $f(x)\vdots g(x)$

Bài 5: Cho $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên. Biết $f(4)=9$ và $f(7)=1$. Chứng minh rằng không tồn tại $f(x)$?

Bài giải:

Vì $f(x)\in Z(x)$

=> $f(7)-f(4)\vdots(7-4)$

=>$1-9\vdots(7-4)$

=>$-8\vdots 3$ không tồn tại

Bài 6: Cho $f(x)\in Z(x)$. Biết rằng $f(0)$ và $f(1)$ là số lẻ. Chứng minh rằng: Đa thức không có nghiệm nguyên ?

Bài giải:

Giả sử x = a là nghiệm nguyên của $f(x)$ thì $f(x)=(x-a)Q(x)$. Trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên.

Do đó: $f(0)=-a.Q(0)$; $f(1)=(1-a).Q(1)$

Vì $f(0)$ lẻ nên –a lẻ

$f(1)$ lẻ nên 1 – a lẻ

Mâu thuẫn.

Vậy $f(x)$ không có hệ số nguyên