

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 6

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM KHOẢNG GIÁ TRỊ CỦA PHÂN SỐ - ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $2 > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$

Bài giải:

Ta có vì a, b, c là các số nguyên dương nên $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}$; $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$

Suy ra: $\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Hay $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Vì $\frac{a}{a+b} < 1$ nên $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a}$; $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b}$

Suy ra: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c+b}{a+b+c} = 2$

Vậy $2 > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$

Bài 2: Cho các số dương a, b, c, d . CMR: $2 > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > 1$

Bài 3: Cho các số dương a, b, c, d . CMR: $2015 > \frac{1008a}{d+c+a} + \frac{1007b}{c+d+b} + \frac{1008c}{a+b+c} + \frac{1007d}{a+b+d} > 1007$

Bài giải:

$A = \frac{1008a}{d+c+a} + \frac{1007b}{c+d+b} + \frac{1008c}{a+b+c} + \frac{1007d}{a+b+d}$

+) Với a, b, c, d là các số nguyên dương ta có: $\frac{1008a}{d+c+a} > \frac{1007a}{d+c+a} > \frac{1007a}{a+b+c+d}$

Tương tự: $\frac{1007b}{c+d+b} > \frac{1007b}{a+b+c+d}$; $\frac{1008c}{a+b+c} > \frac{1007c}{a+b+c+d}$; $\frac{1007d}{a+b+d} > \frac{1007d}{a+b+c+d}$

$$A > 1007 \cdot \left(\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} \right) = 1007$$

$$\text{Ta có: } A = 1008 \cdot \left(\frac{a}{d+c+a} + \frac{c}{a+b+c} \right) + 1007 \cdot \left(\frac{b}{c+d+b} + \frac{d}{a+b+d} \right)$$

$$\text{Vì } a, b, c, d \text{ là các số dương nên } \frac{a}{d+c+a} < \frac{a}{a+c}; \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{a+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d+c+a} + \frac{c}{a+b+c} < \frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} = 1$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{c+d+b} + \frac{d}{a+b+d} < \frac{b}{d+b} + \frac{d}{b+d} = 1$$

$$\text{Nên } A < 1008 \cdot 1 + 1007 \cdot 1 = 2015$$

$$\text{Vậy } 1007 < A < 2015.$$

Bài 4: Tìm các bộ ba số tự nhiên a, b, c khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$$

Bài giải:

Giả sử: $a < b < c$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\text{Hay } \frac{4}{5} < \frac{3}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{15} < \frac{12}{4a} \Rightarrow 15 > 4a \Rightarrow 3\frac{3}{4} > a$$

Mà: a là số tự nhiên nên $a \in \{1; 2; 3\}$

$$\text{+) Với } a = 1 \text{ ta được: } \frac{1}{1} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5} \text{ (loại)}$$

$$\text{+) Với } a = 2 \text{ ta được: } \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Vì $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ nên $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b}$ hay $\frac{3}{10} < \frac{2}{b}$

$$\Rightarrow \frac{6}{20} < \frac{6}{3b} \quad \Rightarrow 20 > 3b \quad \Rightarrow 6\frac{2}{3} > b$$

Mà: b là số tự nhiên và $b > a$ ($a = 2$) nên $b \in \{3; 4; 5; 6\}$

Ta có bảng sau:

b	3	4	5	6
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{c}$	(loại)	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$ (loại)
c		20	10	

+) Với $a = 3$ ta được $\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5}$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

Vì $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ nên $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{b}$ hay $\frac{7}{15} < \frac{2}{b}$

$$\Rightarrow \frac{14}{30} < \frac{6}{3b} \quad \Rightarrow 30 > 3b \quad \Rightarrow 10 > b$$

Mà: b là số tự nhiên và $b > a$ ($a = 3$) nên $b \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Ta có bảng sau:

b	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{c}$	$\frac{13}{60}$ (loại)	$\frac{4}{15}$ (loại)	$\frac{3}{10}$ (loại)	$\frac{34}{105}$ (loại)	$\frac{41}{120}$ (loại)	$\frac{16}{45}$ (loại)

c						
---	--	--	--	--	--	--

Vậy các bộ ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn đề bài là: (2; 4; 20); (2; 5; 10)

VINASTUDY.VN