

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

SỐ CHÍNH PHƯƠNG – DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGUYÊN LÝ KẸP – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Chứng minh rằng: $A = n(n+1)(n+2)(n+3)$ không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

Bài giải:

$$\text{Ta có: } A + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$$

$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

$$\text{Mặt khác: } (n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) = A$$

Điều này hiển nhiên đúng với $n \geq 1$

$$\text{Suy ra: } (n^2 + 3n)^2 < A < A + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

Do đó: A không phải là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng số $A = 4n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n + 2$ (với $n \in \mathbb{Z}$) không thể là số chính phương.

Bài giải:

$$\text{Ta có: } n^2 + n + 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

$$3n^2 + n + 2 = 3 \cdot \left(n + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12} > 0$$

Nên

$$(4n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n + 2) - (n^2 + n + 1) < 4n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n + 2 < (4n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n + 2) + (3n^2 + n + 2)$$

$$\text{Hay } 4n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n + 1 < A < 4n^4 + 4n^3 + 9n^2 + 4n + 4$$

$$\text{Hay } (2n^2 + n + 1)^2 < A < (2n^2 + n + 2)^2$$

Vậy A không thể là số chính phương.

Bài 3: Tích của hai số tự nhiên liên tiếp, của hai số chẵn liên tiếp hoặc 2 số lẻ liên tiếp có thể là số chính phương không ?

Bài giải:

+) Ta chứng minh với hai số tự nhiên liên tiếp:

Ta có: $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ với $\forall n \in \mathbb{N}$

Do đó: $n(n+1)$ không thể là số chính phương.

+) Ta chứng minh với hai số chẵn liên tiếp:

Gọi $a = 2k(2k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $(2k)^2 < a < (2k+1)^2$

Do đó: a không thể là số chính phương.

+) Ta chứng minh với hai số lẻ liên tiếp

Gọi $b = (2k+1)(2k+3)$ (với $k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $(2k+1)^2 < (2k+1)(2k+3) < (2k+3)^2$

Do đó: b không thể là số chính phương.

Bài 4: Cho $A = n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120$, với $n \in \mathbb{N}$.

a) Phân tích A thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng: A không thể là số chính phương.

Bài giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120 \\ &= (n^4 + 14n^3 + 49n^2) + (22n^2 + 154n) + 120 \\ &= (n^2 + 7n)^2 + 22(n^2 + 7n) + 120 \\ &= (n^2 + 7n + 10)(n^2 + 7n + 12) \\ &= (n+2)(n+5)(n+3)(n+4) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

b) Ta có A là tích của 4 số tự nhiên liên tiếp nên A không là số chính phương.