VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

SỐ CHÍNH PHƯƠNG – DẠNG 2: TÍNH CHẤT NHÂN CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Tìm các số tự nhiên x sao cho $x^2 + 21$ là số chính phương

Bài giải:

Đặt: $65 + x^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 65$

$\Leftrightarrow (y+x)(y-x) = 3.15 = 64.1$

Hoặc $\begin{cases} y+x=13 \\ y-5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} y+x=65 \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=32 \\ y=33 \end{cases}$

Vậy x = 4 ; y = 9 hoặc x = 32; y = 33

Bài 2: Tìm số nguyên tố x để $x^2 + x + 1991$ là số chính phương.

Bài giải:

Từ $x^2 + x + 1991 = y^2$

Ta có $4y^2 = 4x^2 + 4x + 7964$

Hay $4y^2 = (2x+1)^2 + 7963 \Leftrightarrow 4y^2 - (2x+1)^2 = 7963$

$\Leftrightarrow (2y+2x+1)(2y-2x-1) = 7963$

Có thể thử lại để thấy rằng 7963 là một số nguyên tố (không chia hết cho bất kì số nguyên tố nào từ 0 đến 90) từ đó suy ra

$\begin{cases} 2y+2x+1=7963 \\ 2y-2x-1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y+2x+1=1 \\ 2y-2x-1=7963 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} 2y+2x+1=-7963 \\ 2y-2x-1=-1 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} 2y+2x+1=-1 \\ 2y-2x-1=-7963 \end{cases}$

Tính ra ta được x = 1990 hoặc x = -1991.

Bài 3: Tìm số hữu tỉ x sao cho $x^2 + x + 6$ là số chính phương.

Bài giải :

Giả sử $x = \frac{p}{q}$ với (p,q) = 1 và q > 0 sao cho $\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} + 6 = n^2$ với $n \in N$

Suy ra : $p^2 = q\left(-p - 6q + n^2 q\right) \vdots q \Rightarrow q = 1$ Vậy: $x = p \in Z$.

Khi đó: $p^2 + p + 6 = n^2$

$$\Leftrightarrow 4p^2 + 4p + 24 = 4n^2$$
$$\Leftrightarrow (2n)^2 - (2p+1)^2 = 23$$
$$\Leftrightarrow (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1) = 23$$

Phân tích: 23 = 1.23 = (-1).(-23) = 23.1 = (-23).(-1). Giải ra ta được : p = 5, n = 6.

Bài 4: Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng nếu bớt mỗi chữ số đó một đơn vị thì được số mới có 4 chữ số cũng là số chính phương.

Bài giải:

Gọi số có bốn chữ số cần tìm là: $\overline{abcd}$

Ta có: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = X^2$

Nếu bớt mỗi chữ số một đơn vị ta được số mới là $\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}$

$$\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)} = 1000(a-1) + 100(b-1) + 10(c-1) + (d-1)$$

$$= 1000a + 100b + 10c + d - 1000 - 100 - 10 - 1$$

$$= X^2 - 1111 = Y^2$$

$$\Rightarrow X^2 - Y^2 = 1111$$

$$\Rightarrow (X - Y).(X + Y) = 1111.1 = 101.11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X - Y = 1 \\ X + Y = 1111 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 556 \\ Y = 555 \end{cases} \text{(loại)}$$

Hoặc $\begin{cases} X - Y = 11 \\ X + Y = 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 56 \\ Y = 45 \end{cases}$ (nhận)

Vậy số cần tìm là $56^2 = 3136$

Bài 5: Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

Bài giải:

Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là n, n + 1, n+ 2, n + 3 ($n \in N$). Ta có

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = n.(n + 3(n + 1)(n + 2) + 1$

$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ (*)

Đặt $n^2 + 3n = t$ ($t \in N$) thì (*) $= t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$

$= (n^2 + 3n + 1)^2$

Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$ Vậy $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

Bài 6: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + . . . + k(k+1)(k+2)$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là số chính phương .

Bài giải:

$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2)$

$4.S = 1.2.3.(4–0)+ 2.3.4.(5 – 1) + 3.4.5.(6 – 2) + \ldots + k(k+1)(k+2)[(k+3) – (k +1)]$

$4.S=1.2.3.4–0+2.3.4.5–1.2.3.4+3.4.5.6–2.3.4.5+k(k+1)(k+2)(k+3)–(k-1)k(k+1)(k+2)$

$= (k-1)k(k+1)(k+2)$

$\Rightarrow 4.S + 1 = (k-1)k(k+1)(k+2) + 1$

Theo kết quả của bài trước suy ra $(k-1)k(k+1)(k+2) + 1$ là số chính phương.

VINASTUDY.