VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
SỐ CHÍNH PHƯƠNG – DẠNG 4: TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG – ĐÁP ÁN

Bài 1: Tìm dư trong phép chia một số chính phương cho 3, cho 5

Bài giải:

Số chính phương có dạng n^2 ($n \in N$)

Chia n cho 3 thì n = 3k hoặc $n = 3k \pm 1$

Nếu n = 3k thì $n^2 = 9k^2 \vdots 3$

Nếu $n = 3k \pm 1$ thì $n^2 = (3k \pm 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ chia 3 dư 1

Vậy số chính phương chia cho 3 có dư la 0 hoặc 1. Từ đó ta có kết quả sau. Một số có dạng 3k + 2 không thể là một số chính phương

Chia n cho 5 thì $n = 5k, n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2$

Nếu n = 5k thì $n^2 = 25k^2 \vdots 5$

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$ chia 5 dư 1

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$ chia 5 dư 4

Vậy số chính phương khi chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4. Từ đó ta có kết quả sau : một số có dạng 5k +2 hoặc 5k + 3 không thể là một số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng tổng luỹ thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Bài giải:

Tổng luỹ thừa 2k $(k \in N^*)$ của ba số nguyên liên tiếp có dạng $(n - 1)^{2k} + n^{2k} + (n + 1)^{2k}$

Trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3, hai số còn lại có dạng $3k \pm 1$ nên tổng luỹ thừa chẵn của ba số nguyên liên tiếp chia cho 3 có dư là 2 nên không thể là một số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Bài giải:

Tổng bình phương của 5 số nguyên liên tiếp có dạng

$T = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$

Ta chứng minh $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 với mọi n

Nếu $n \vdots 5k$ thì $n^2 + 2$ chia cho 5 dư 2

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 + 2 = (5k+1)^2 + 2$ chia 5 dư 3

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 2 = (5k \pm 2)^2 + 2$ chia 5 dư 1

Vậy $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 nên T chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 do đó T không phải là một số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kỳ không phải là một số chính phương.

Bài giải:

a và b lẻ nên a = 2k+1, b = 2m+1 (Với $k, m \in N$)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k+1)^2 + (2m+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1$

$= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 = 4t + 2$ (Với $t \in N$)

4t + 2 chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên $a^2 + b^2$ không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh rằng tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Bài giải:

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là:a , a + 1, a + 2, a + 3 (với $a \in N$)

Xét: A = a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) = 4a + 6

Vì $(4a + 6) \vdots 2$ mà $(4a + 6) \not\vdots 4$ nên A không phải là số chính phương.

Bài 6: Tìm 3 số lẻ liên tiếp mà tổng bình phương là một số có 4 chữ số giống nhau.

Bài giải:

Gọi 3 số lẻ liên tiếp đó là 2n-1, 2n+1, 2n+3 ($n \in N$)

Ta có $A = (2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = 12n^2 + 12n + 11$

Theo đề bài ta đặt $12n^2 + 12n + 11 = \overline{aaaa} = 1111.a$ với a lẻ và $1 \le a \le 9$

$$\Rightarrow 12n(n+1) = 11(101a - 1)$$

$$\Rightarrow 101a - 1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow 2a - 1 \,\vdots\, 3$$

Vì $1 \le a \le 9$ nên $1 \le 2a-1 \le 17$ và 2a-1 lẻ nên $2a - 1 \in \{3; 9; 15\}$

$$\Rightarrow a \in \{2; 5; 8\}$$

Vì a lẻ $\Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 21$

3 số cần tìm là 41; 43; 45

VINASTUDY.