VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

SỐ CHÍNH PHƯƠNG – DẠNG 5: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ BIỂU THỨC LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Tìm một số có hai chử số biết rằng hiệu bình phương của nó và số viết theo thứ tự ngược lại là một số chính phương

Bài giải:

Giả sử $\overline{ab}$ là số có hai chử số sao cho $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chính phương.

Ta có : $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=(10a+b)^2-(10b+a)^2=99(a^2-b^2)\vdots 11$

Vì $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2$ là số chính phương nên $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2\vdots 121$ suy ra

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)\vdots 11\Rightarrow a-b\vdots 11$ (vì $0<a-b\le 8$)

Mà $0<a+b\le 18$ nên a + b = 11 (*)

Từ (*) suy ra $\overline{ab}^2-\overline{ba}^2=9.11.11(a-b)$ là số chính phương nên a – b = 1 hoặc a – b = 4

+ Nếu a – b = 1 thì từ (*) ta có hệ

$$\begin{cases}a+b=11\\a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}$$

Thử lại $65^2-56^2=33^2$

+ Nếu a – b =4 thì từ (*) ta có hệ

$$\begin{cases}a+b=11\\a-b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{15}{2}\end{cases}$$ (loại) Vậy số cần tìm là 65

Bài 2: Tìm số chính phương $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{ab}-\overline{cd}=1$

Bài giải:

Giả sử $n^2=\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}=100(\overline{cd}+1)+\overline{cd}=101\overline{cd}+100$

Suy ra : $101\overline{cd}=n^2-10^2=(n-10)(n+10)$

Vì n < 100 và 101 là số nguyên tố nên n + 10 = 101 suy ra n = 91

thử lại $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$ có 82 – 81 =1 vậy số cần tìm là 8281

Bài 3: Tìm số chính phương có 4 chử số mà hai chử số đầu giống nhau và hai chử số cuối giống nhau

Bài giải:

Giả sử $\overline{xxyy}$ là một số chính phương ta có:

$\overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y$

$= 1100x + 11y = 11(100x + y) \vdots 11$

Do $\overline{xxyy}$ là số chính phương nên $\overline{xxyy} \vdots 121 \Rightarrow 100x + y \vdots 11 \Rightarrow x + y \vdots 11$ $(vi\ \ 99x \vdots 11)$

Do $0 < x + y \le 11$ nên x + y = 11 $\overline{xxyy} = 11(100x + y) = 11(99x + 11) = 11^2(9x + 1)$

Suy ra 9x + 1 là số chính phương suy ra x=7, y=4 Thử lại 7744 = 88^2 . Vậy số cần tìm là 7744.

Bài 4: Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ (a > b > 0) sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Bài giải:

$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a)$

$= 9a - 9b$

$= 9(a - b)$

$= 3^2(a - b)$

Do $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương nên a – b là số chính phương

Ta thấy $1 \le a - b \le 8$ nên $a - b \in \{1, 4\}$

Với a – b = 1 thì $\overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$ loại các hợp số 21, 32, 54, 65, 76, 87, 98

Còn 43 là số nguyên tố

-Với a – b = 4 thì $\overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84\}$ loại các hợp số 51, 62, 84, 95 còn 73 là số nguyên tố

Vậy $\overline{ab}$ = 43 hoặc 73 Khi đó 43 – 34 = 9 = 3^2 và 73 – 37 = 36 = 6^2

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để n^2 + 31n + 1984 là số chính phương.

Bài giải:

Giả sử $n^2 + 31n + 1984 = m^2$ ($m \in N$) Suy ra $4.n^2 + 4.31n + 4.1984 = 4m^2$

Hay $(2n + 31)^2 + 6975 = 4m^2$ Hay $(2m – 2n + 31)(2m + 2n + 31) = 6975$ (*)

Để ý rằng $6975 = 3^2.5^2.31$ và do $m > 44$ (vì nếu $m \le 43$ thì $m^2 < n^2 + 31n + 1984$) nên $2n + 2m + 31 > 121$

Khi đó từ (*) suy ra $0 < 2m - 2n - 31 < \frac{6975}{121} < 58$

Do đó 2m – 2n – 31 chỉ có thể nhận các giá trị : 1, 3, 5, 9, 15, 25, 31, 45 và

2m + 2n + 31 nhận các giá trị : 6975, 2325, 1395, 775, 465, 279, 225, 155, suy ra các giá trị tương ứng của n là : 1728, 565, 332, 176, 97, 48, 33, 12.

Các giá trị này của n đều thoã mãn đề bài.

Bài 6: Tìm số nguyên tố p sao cho tổng tất cả các ước dương của p^4 là một số chính phương.

Bài giải:

Các ước dương của p^4 là 1, p, p^2, p^3, p^4

Giả sử : $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2$ $(n \in N)$

Ta có : $4n^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$ (1)

Suy ra : $4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 4p + 8p^2$

Hay : $(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 1)^2$

Suy ra: $(2n)^2 = (2p^2 + 2p + 1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = (2p^2 + p + 1)^2$
$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow p = 3$

Với p = 3, ta có : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$ Vậy số nguyên tố cần tìm là p = 3.

VINASTUDY.