VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

DẠNG 1: CÓ BAO NHIÊU SỐ NGUYÊN TỐ CÓ DẠNG AX + B – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Chứng minh rằng: với mọi số nguyên $n>1$, số A = n^4+4^n là một hợp số.

Bài giải:

+) Với n là số chẵn, n có dạng: 2k (k ≥ 1) thì n^4+4^n là số chẵn và lớn hơn 2 nên A là hợp số.

+) Với n là số lẻ, n có dạng: $2k+1$ (với $k\ge 1$) khi đó ta có:

$$n^4+4^n=(2k+1)^4+4^{2k+1}=(2k+1)^4+4^{2k+1}$$

$$=(2k+1)^4+2.(2k+1)^2.2^{2k+1}+\left(2^{2k+1}\right)^2-2.(2k+1)^2.2^{2k+1}$$

$$=\left[(2k+1)^2+2^{2k+1}\right]^2-(2k+1)^2.2^{2k+2}$$

$$=\left[(2k+1)^2+2^{2k+1}-(2k+1).2^{k+1}\right]\left[(2k+1)^2+2^{2k+1}+(2k+1).2^{k+1}\right]$$

Vì n là số lẻ nên $(2k+1)^2+2^{2k+1}-(2k+1).2^{k+1}>1$. Do đó: A là hợp số.

Vậy với mọi số nguyên $n>1$, số A = n^4+4^n là một hợp số.

Bài 2: Chứng minh rằng: các số có dạng $A_{(n)}=3^{2^{4n+1}}+2$ với n nguyên dương đều không phải là số nguyên tố.

Bài giải:

$$A_{(n)}=3^{2^{4n+1}}+2$$

Ta có: $2^{4n+1}=2.2^{4n}=2.16^n\equiv 2.1\equiv 2 \pmod 5$

Do đó: 2^{4n+1} chia 5 dư 2 nên 2^{4n+1} có dạng: 5k + 2

Khi đó ta có:

$$A_{(n)}=3^{2^{4n+1}}+2=3^{5k+2}+2=9.\left(3^5\right)^k+2=9.243^k+2\equiv 9.1+2=11\equiv 0 \pmod{11}$$

Vậy $A_{(n)}$ chia hết cho 11 và lớn hơn 11 với n là số nguyên dương nên $A_{(n)}$ là hợp số

Bài 3: Giả sử p là số nguyên tố không nhỏ hơn 5. Chứng minh rằng: $\left(p^2-1\right)\vdots 24$

Bài giải:

+) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3.

Do đó p chia 3 dư 1 hoặc dư 2.

$\Rightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 3$

$\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$ hay $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

+) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và không chia hết cho 8.

Do đó: p chia 8 dư 1, 3, 5, 7

Hay $\left[\begin{array}{l} p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{array}\right. \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$ hay $p^2 - 1$ chia hết cho 8.

Vậy $p^2 - 1$ chia hết cho 3 và 8 nên $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Bài 4: Cho n là số tự nhiên khác 0 và n không chia hết 3. Chứng minh rằng: $3^{2n} + 3^n + 1$ là hợp số.

Bài giải:

B = $3^{2n} + 3^n + 1$

Vì n là số tự nhiên không chia hết cho 3 thì n có dạng: 3k + 1; 3k + 2 (với k là số tự nhiên)

+) Với n = 3k + 1. Khi đó ta được:

B = $3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{2(3k+1)} + 3^{3k+1} + 1 = 3^2.\left(3^3\right)^{2k} + 3.\left(3^3\right)^k + 1 \equiv 9.1^{2k} + 3.1^k + 1 \equiv 0 \pmod{13}$

Hay B chia hết cho 13. Mà B là số tự nhiên lớn hơn 13 nên B là hợp số.

+) Với n = 3k + 2. Khi đó ta được:

B = $3^{2n} + 3^n + 1 = 3^{2(3k+2)} + 3^{3k+2} + 1 = 3^4.\left(3^3\right)^{2k} + 3^2.\left(3^3\right)^k + 1 \equiv 81.1^{2k} + 9.1^k + 1 = 91 \equiv 0 \pmod{13}$

Hay B chia hết cho 13. Mà B là số tự nhiên lớn hơn 13 nên B là hợp số.

Vậy B là hợp số.

VINASTUDY.