VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
DẠNG 2: CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ NUYÊN TỐ - ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Chứng minh rằng $(p-1)!$ chia hết cho p nếu p là hợp số, không chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Bài giải:

Xét trường hợp p là hợp số. Nếu p là hợp số thì p là tích của các thừa số nguyên tố nhỏ hơn p và số mũ các lũy thừa này không thể lớn hơn số mũ của chính các lũy thừa ấy chứa trong $(p-1)!$. Vậy $(p-1)! \vdots p$ (đpcm)

Xét trường hợp p là số nguyên tố. Vì p là số nguyên tố nên p và một thừa số của tích (p- 1) luôn nguyên tố cùng nhau nên (p – 1)! không chia hết cho p.

Bài 2: Cho $2^m - 1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng m cũng là số nguyên tố.

Bài giải:

Giả sử m là hợp số.

$\Rightarrow m = pq$ (với $p, q \in \mathbb{N}; p, q > 1$)

Khi đó: $2^m - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)\left((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + ... + 1\right)$

Vì P > 1 suy ra $2^p - 1 > 1$ và $(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + ... + 1 > 1$

Dẫn đến $2^m - 1$ là hợp số, trái với giả thiết $2^m - 1$ là số nguyên tố.

Vậy m phải là số nguyên tố (ĐPCM)

Bài 3: Chứng minh rằng: các số sau đây đều là hợp số với mọi số tự nhiên n khác 0:

a) $2^{2^{2n+1}} + 3$ b) $19.8^n + 17$

Bài giải:

a) Ta có: $2^{2n+1} = 2.2^{2n} = 2.4^n \equiv 2.1 \equiv 2 \pmod 3$

Hay 2^{2n+1} chia 3 dư 3. Khi đó: 2^{2n+1} có dạng: $3k + 2$ (với k là số tự nhiên)

Khi đó ta được: $2^{2^{2n+1}} + 3 = 2^{3k+2} + 3 = 4.8^k + 3 \equiv 4.1^k + 3 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$

Vậy $2^{2^{2n+1}}+3$ là số tự nhiên lớn hơn 3 và chia hết cho 7 nên $2^{2^{2n+1}}+3$ là hợp số.

b) A = 19.8^n+17

Vì n là số tự nhiên nên n có dạng: 4k ; 4k + 1; 4k + 2; 4k + 3 (với k là số tự nhiên)

+) Với $n=4k$. Khi đó ta được: $19.8^n+17=19.8^{4k}+17\equiv 19.(-1)^{4k}+17\equiv 19+17=36\equiv 0 \pmod 3$

Mà: 19.8^n+17 là số tự nhiên lớn hơn 3 nên A là hợp số.

+) Với $n=4k+1$. Khi đó ta được:

A = $19.8^{4k+1}+17=19.8.(8^4)^k+17=152.4096^k+17\equiv 152.1^k+17=169\equiv 0 \pmod{13}$

Mà: A là tự nhiên lớn hơn 13 nên A là hợp số.

+) Với $n=4k+2$. Khi đó ta được:

A = $19.8^{4k+2}+17\equiv 19.(8^2)^{2k+1}+17\equiv 19.\left[(-1)^2\right]^{2k+1}+17\equiv 19+17=36\equiv 0 \pmod 3$

Mà: A là số tự nhiên lớn hơn 3 nên A là hợp số.

+) Với $n=4k+3$. Khi đó ta được:

A = $19.8^{4k+3}+17=19.512.4096^k+17\equiv 4.2.1^k+2\equiv 0 \pmod 5$

Mà: A là số tự nhiên lớn hơn 5 nên A là hợp số.

Vậy với mọi số tự nhiên n khác 0 thì A là hợp số.

VINASTUDY.