VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

DẠNG 4: NHẬN BIẾT SỐ NGUYÊN TỐ, SỰ PHÂN BỐ CỦA SỐ NGUYÊN TỐ TRONG DÃY TỰ NHIÊN – ĐÁP ÁN

Bài 1: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và 2p + 1 cũng là số nguyên tố thì 4p + 1 là hợp số.

Bài giải:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng: 3k +1; 3k + 2.

+) Với p = 3k + 1 khi đó 2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3 $\vdots$ 3 và 6k + 3 > 3 (không thỏa mãn)

+) Với p = 3k + 2 thì 2p + 1 = 2(3k + 2) = 6k + 4

Khi đó: 4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 $\vdots$ 3 và 12k + 9 > 3 nên 4p + 1 là hợp số.

Vậy 4p + 1 là hợp số.

Bài 2: Chứng minh rằng: p và p + 2 là 2 số nguyên tố thì tổng của chúng chia hết cho 12.

Bài giải:

Ta có: p + p + 2 = 2p + 2 = 2(p + 1)

+) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ do đó p + 1 là số chẵn.

$\Rightarrow$ 2(p + 1) $\vdots$ 4 (1)

+) Xét 3 số tự nhiên liên tiếp: p; p + 1; p + 2 luôn có 1 số chia hết cho 3.

Mà p; p + 2 là các số nguyên tố nên p + 1 chia hết cho 3

$\Rightarrow$2(p + 1) $\vdots$ 3 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 2(p + 1) $\vdots$ 12

Vậy tổng của chúng chia hết cho 12.

Bài 3: Giả sử p là số nguyên tố không nhỏ hơn 5. Chứng minh rằng: $\left(p^2-1\right) \vdots 24$

Bài giải:

+) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3.

Do đó p chia 3 dư 1 hoặc dư 2.

$\Rightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 3$

$\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$

$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$ hay $p^2 - 1$ chia hết cho 3.

+) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và không chia hết cho 8.

Do đó: p chia 8 dư 1, 3, 5, 7

Hay $\left[\begin{array}{l} p \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ p \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{array}\right. \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 8$

$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$ hay $p^2 - 1$ chia hết cho 8.

Vậy $p^2 - 1$ chia hết cho 3 và 8 nên $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Bài 4: Chứng minh rằng nếu p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - q^2$ chia hết cho 24.

Bài giải:

Chú ý: Hằng đẳng thức: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

+) p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3.

Mặt khác (p – 1)p(p + 1) = $p\left(p^2 - 1\right)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3.

$\Rightarrow p^2 - 1$ phải chia hết cho 3. (1)

+) p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ nên p không chia hết cho 2.

Do đó: p có dạng: 2k + 1

Suy ra: (p – 1)(p + 1) = (2k + 1 – 1)(2k + 1 + 1) = 2k(2k + 2) = 2k.2(k + 1) = 4k(k + 1)

Mà: k(k + 1) chia hết cho 2 nên 4k(k + 1) chia hết cho 8. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Chứng minh tương tự: $q^2 - 1$ chia hết cho 24.

Do đó: $\left(p^2 - 1\right) - \left(q^2 - 1\right) = p^2 - 1 - q^2 + 1 = p^2 - q^2$ chia hết cho 24.

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p đều không tồn tại các số nguyên dương m, n thỏa mãn: $\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$.

Bài giải:

Giả sử tồn tại số nguyên tố lẻ p sao cho: $\frac{1}{p}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}$

$\Leftrightarrow p\left(m^2+n^2\right)=m^2.n^2$

$\Rightarrow m^2.n^2 \vdots p$

Mà p là số nguyên tố nên $m \vdots p$ hoặc $n \vdots p$.

Nếu $m \vdots p$ thì m = kp (với k $\in$ N^*)

$\Rightarrow p\left(m^2+n^2\right)=k^2p^2n^2$

$\Rightarrow m^2+n^2=pk^2n^2$

$\Rightarrow m^2+n^2 \vdots p$

Mà: m chia hết cho p nên suy ra n cũng chia hết cho p.

Vậy m $\geq$ p; n $\geq$p

Tương tự nếu $n \vdots p$ thì m $\geq$ p; n $\geq$p

Từ đó suy ra: $m^2 \geq p^2; n^2 \geq p^2$

Nên $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{2}{p^2}$ suy ra: p $\leq$ 2

Vô lí vì p là số nguyên tố lẻ.

Bài 6: Cho dãy số các số tự nhiên 2; 6; 30; 210; … được xác định như sau: Số hạng thứ k bằng tích của k số nguyên tố đầu tiên (k = 1; 2; 3; …)

Biết rằng tồn tại hai số hạng của dãy có hiệu bằng 30000. Tìm hai số hạng đó.

Bài giải:

Gọi số hạng cần tìm của dãy là: a và a + 30000 (với a $\in$ N, a $\geq$ 2)

Vì a + 30000 > 210 nên a + 30000 = 2.3.5.7…. suy ra a + 30000 $\vdots$ 7, mà 30000 không chia hết cho 7 nên a không chia hết cho 7.

Suy ra a < 210.

Mặt khác a + 30000 $\vdots$ 30 mà 30000 $\vdots$ 30 $\Rightarrow$ a $\vdots$ 30 $\Rightarrow$a = 30

Vậy hai số hạng cần tìm là 30 và 30030 thỏa mãn đề bài.

Bài 7: Tìm k $\in$ N để trong dãy số k + 1; k + 2; …; k + 10 có nhiều số nguyên tố nhất.

Bài giải:

Trong 10 số tự nhiên liên tiếp có 5 số chẵn và 5 số lẻ.

Vậy không quá 6 số nguyên tố (vì chỉ có số nguyên tố chẵn duy nhất là 2).

+) Với k = 0, từ 1 đến 10 có 4 số nguyên tố (2; 3; 5; 7)

+) Với k = 1, từ 2 đến 11 có 5 số nguyên tố (2, 3, 5, 7, 11)

+) Với k > 1 từ 3 trở đi không có số nào chẵn là số nguyên tố và trong đó có ít nhất một số lẻ là bội của 3. Do đó chỉ có thể nhiều nhất 4 số nguyên tố.

Vậy k = 1 ta có nhiều số nguyên tố nhất.

VINASTUDY.