VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG - ĐÁP ÁN

Bài 1: Có hay không số tự nhiên n để $2010+n^2$ là số chính phương.

Bài giải

Giả sử $2010+n^2$ là số chính phương thì $2010+n^2=m^2$ $(m\in\mathbb{N})$

Từ đó suy ra $m^2-n^2=2010$

$\Leftrightarrow (m-n)(m+n)=2010$

Như vật trong hai số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất một số chẵn (1)

Mặt khác $m+n+m-n=2m$ là số chẵn

$\Rightarrow m+n$ và $m-n$ cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m+n$ và $m-n$ cùng là số chẵn

$\Rightarrow (m+n)(m-n)\,\vdots\, 4$

Mà $2010 \not\vdots\, 4$ (vô lý)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai.

Vậy không có số tự nhiên n nào thỏa mãn $2010+n^2$ là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu p là tích của n $(n>1)$ số nguyên tố đầu tiên thì $p+1$ và $p-1$ không thể là các số chính phương.

Bài giải

Vì p là tích của n số nguyên đầu tiên nên $p\,\vdots\,2$ và $p \not\vdots\, 4$ (1)

Giả sử $p+1$ là số chính phương. Đặt $p+1=m^2$ $(m\in\mathbb{N})$

Vì p chẵn nên $p+1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ.

Đặt $m=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$

$\Rightarrow m^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=p+1$

$\Rightarrow p = 4k^2 + 4k$

$\Rightarrow p \vdots 4$ (vô lý)

Vậy $p+1$ không là số chính phương.

Vì $n > 1$ nên p là tích có chứa số nguyên tố 3

$\Rightarrow p \vdots 3$

$\Rightarrow p - 1 = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow p - 1$ không là số chính phương

Vậy nếu p là tích của $n\ (n > 1)$ số nguyên tố đầu tiên thì $p+1$ và $p-1$ không thể là các số chính phương.

Bài 3: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng định lý: Với mọi số nguyên dương n, nếu $n^2 + 4n + 2$ chia hết cho 4 thì n chia hết cho 4.

Bài giải

Giả sử $n^2 + 4n + 2$ chia hết cho 4 mà n không chia hết cho 4.

$\Rightarrow n = 4k + a\left(0 < a < 4,\ a, k \in \mathbb{N}\right)$

$\Rightarrow n^2 + 4n + 2 = \left(4k + a\right)^2 + 4\left(4k + a\right) + 2 = 16k^2 + 8ka + a^2 + 16k + 4a + 2 \vdots 4$

$\Rightarrow a^2 + 2 \vdots 4$

Do $a \in \{1, 2, 3\}$ nên không có giá trị nào thỏa mãn $a^2 + 2 \vdots 4$

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai

Vậy với mọi số nguyên dương n, nếu $n^2 + 4n + 2$ chia hết cho 4 thì n chia hết cho 4.

Bài 4: Chứng minh rằng: $n^2 + 3n + 5 \not\vdots\ 121$ với $\forall n \in \mathbb{N}$

Bài giải

Ta có: $n^2 + 3n + 5 \vdots 121$

$\Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 20 \vdots 121$ (vì $(4;121) = 1$)

$\Leftrightarrow (2n+3)^2 + 11 \vdots 121$

$\Leftrightarrow (2n+3)^2 \vdots 11$

Vì 11 là số nguyên tố $\Rightarrow 2n-3 \vdots 11$

$\Rightarrow (2n-3) \vdots 121$

$\Rightarrow 11 \vdots 121$ (vô lý)

Vậy $n^2+3n+5 \not\vdots 121$

Bài 5: Có tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2+n+2 \vdots 49$ không?

Bài giải

Giả sử tồn tai $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2+n+2 \vdots 49$

$\Leftrightarrow 4n^2+4n+8 \vdots 49$

$\Leftrightarrow (2n+1)^2+7 \vdots 49$

$\Rightarrow (2n+1)^2 \vdots 7$

$\Rightarrow (2n+1) \vdots 7$

$\Rightarrow (2n+1)^2 \vdots 49$

$\Rightarrow 7 \vdots 49$ (vô lý)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai

Vậy không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2+n+2 \vdots 49$

VINASTUDY.