

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
DẠNG 4: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Chứng minh rằng: số đường chéo của một đa giác lồi $n(n \geq 4)$ cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$

Bài giải

Với $n = 4$ ta có tứ giác \Rightarrow có 2 đường chéo

$$\text{Mà } 2 = \frac{4 \cdot (4-3)}{2}$$

$\Rightarrow n = 4$ đúng

Giả sử $n = k$ mệnh đề đúng

\Rightarrow Đa giác lồi k cạnh có số đường chéo là $\frac{k(k-3)}{2}$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$ tức là chứng minh đa giác lồi có $k+1$ cạnh có số đường chéo là: $\frac{(k+1)(k+1-3)}{2}$

Xét đa giác lồi có $k+1$ cạnh \Rightarrow Có $k+1$ đỉnh

Nối đỉnh A_{k+1} với các đỉnh A_1, A_2, \dots, A_{k-1} ta được thêm $k-2$ đường chéo, ngoài ra A_1A_k cũng là đường chéo.

Vậy số đường chéo của đa giác $k+1$ cạnh là:

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 2 + 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}$$

\Rightarrow đpcm

Bài 2: Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ vuông tại A với số đo các cạnh là a, b, c thì với mọi $n \geq 2$ ta có bất đẳng thức $b^n + c^n \leq a^n$

Bài giải:

Với $n = 1$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có: $b + c < a$

⇒ Mệnh đề đúng với $n = 1$

Với $n = 2$

Áp dụng định lý Py-ta – go ta có:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

⇒ Mệnh đề đúng với $n = 2$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$

$$\Rightarrow b^k + c^k \leq a^k$$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$ tức là phải chứng minh $b^{k+1} + c^{k+1} \leq a^{k+1}$

$$\text{Ta có: } b^{k+1} + c^{k+1} = b^k \cdot b + c^k \cdot c < b^k \cdot a + c^k \cdot a = a \cdot (b^k + c^k) < a \cdot a^k = a^{k+1}$$

$$\Rightarrow b^{k+1} + c^{k+1} < a^{k+1}$$

⇒ đpcm

VINASTUDY.VN