VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
NGUYÊN LÍ DIRICHLET VÀ ỨNG DỤNG – DẠNG 2: SỰ CHIA HẾT – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1: Hãy chứng tỏ rằng trong 5 số tự nhiên lẻ bất kì và không chia hết cho 5 bao giờ cũng có ít nhất 2 số có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài giải:

Số tự nhiên lẻ bất kì và không chia hết cho 5 nên có các chữ số tận cùng là: 1; 3; 7; 9.

Do đó trong 5 số tự nhiên lẻ bất kì và không chia hết cho 5 có ít nhất $\left[\frac{5}{4}\right]+1=2$ số có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 2: CMR trong 3 số chính phương bất kì luôn có 2 số có hiệu chia hết cho 4

Bài giải:

Nhận thấy: Với một số tự nhiên n bất kì ta luôn có khi n chia cho 4 dư 0; 1; 2; 3 nên n có dạng: 4k; 4k + 1; 4k + 2; 4k + 3.

+) Với n = 4k khi đó ta được: $n^2=(4k)^2=16k^2$ chia hết cho 4.

+) Với n = 4k + 1. Ta có: 4k + 1 $\equiv$ 1 (mod 4)

$\Rightarrow (4k+1)^2\equiv 1^2\equiv 1$ (mod 4) khi đó ta được: $(4k+1)^2$ chia 4 dư 1.

+) Với n = 4k + 2. Ta có: 4k + 2 $\equiv$ 2 (mod 4)

$\Rightarrow (4k+2)^2\equiv 2^2\equiv 0$ (mod 4) khi đó ta được: $(4k+2)^2$ chia hết cho 4.

+) Với n = 4k + 3. Ta có: 4k + 3 $\equiv$ 3 (mod 4)

$\Rightarrow (4k+3)^2\equiv 3^2\equiv 1$ (mod 4) khi đó ta được: $(4k+3)^2$ chia cho 4 dư 1.

Vậy với só n tự nhiên bất kì ta luôn có n^2 chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 1.

Do đó trong 3 số chính phương bất kì luôn có 2 số khi chia cho 4 có cùng số dư nên hiệu của chúng sẽ chia hết cho 4.

Vậy trong 3 số chính phương bất kì luôn có 2 số có hiệu chia hết cho 4.

Bài 3: Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

(Đề thi vòng 2, THPT Chuyên Đại học Sư Phạm, năm học 2012 – 2013)

Bài giải:

Gọi các số đã cho là $a_1;a_2;a_3;...;a_5$ với $a_i=2^{x_i}.3^{y_j}$ $(x_i;y_i\in N)$

Trong 5 cặp số $(x_1,y_1);....;(x_5,y_5)$, mỗi cặp số thuộc một trong bốn dạng: (chẵn, chẵn); (chẵn, lẻ); (lẻ, chẵn); (lẻ, lẻ)

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại $\left[\frac{5-1}{4}\right]+1$ = 2 cặp số cùng dạng.

TH1: Giả sử 2 cặp số $(x_1,y_1);(x_2,y_2)$ cùng dạng (chẵn, chẵn) $\Rightarrow$ x_1+x_2 và y_1+y_2 đều là các số chẵn.

TH2: Giả sử 2 cặp số $(x_1,y_1);(x_2,y_2)$ cùng dạng (chẵn, lẻ) $\Rightarrow$ x_1+x_2 và y_1+y_2 đều là các số chẵn.

TH3: Giả sử 2 cặp số $(x_1,y_1);(x_2,y_2)$ cùng dạng (lẻ, chẵn) $\Rightarrow$ x_1+x_2 và y_1+y_2 đều là các số chẵn.

TH4: Giả sử 2 cặp số $(x_1,y_1);(x_2,y_2)$ cùng dạng (lẻ, lẻ) $\Rightarrow$ x_1+x_2 và y_1+y_2 đều là các số chẵn.

Vậy x_1+x_2 và y_1+y_2 đều là các số chẵn nên $a_1a_2=2^{x_1+x_2}.3^{y_1+y_2}$ là số chính phương. (vì số chính phương có các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn).

Bài 4. Chứng minh đối với một số n nguyên dương bất kì bao giờ cũng tìm được một số tự nhiên mà các chữ số của nó chỉ gồm có chữ số 5 và chữ số 0 và chia hết cho n.

Bài giải:

xét n + 1 số sau: $a_1=5;a_2=55;...;a_{n+1}=55...5$ (n + 1 chữ số 5).

Theo nguyên lí Dirichlet: với n + 1 số trên sẽ tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n. Hiệu của hai số này là số có dạng: 55…50…0 gồm toàn chữ số 0 và chia hết cho n (điều phải chứng minh).

Bài 5. Chứng minh luôn tồn tại một số gồm toàn chữ số 8 và chia hết cho 2011.

Bài giải:

Xét dãy 8; 88; 888; ...; $\underset{2012c/s8}{88....8}$ (1)

Dãy (1) có 2012 số hạng.

Một số tự nhiên chia 2011 có 2011 số dư nên theo nguyên lý Dirichlet, $\exists$ 2 số có cùng số dư khi chia cho 2011, giả sử là $\underset{mc/s8}{88...8}$ và $\underset{nc/s8}{88...8}$ $(1 \le m < n \le 2012$; với m, n $\in$ N)

$\Rightarrow \underset{nc/s8}{88...8} - \underset{mc/s8}{88...8} \;\vdots\; 2011$

$\Rightarrow \underset{n-m\ c/s8}{88...8}\underbrace{00....0}_{mc/s0} \;\vdots\; 2011$

$\Rightarrow \underset{n-m\ c/s8}{88...8}.10^m \;\vdots\; 2011$

$\Rightarrow \underset{n-m\ c/s8}{88...8} \;\vdots\; 2011$

VINASTUDY.