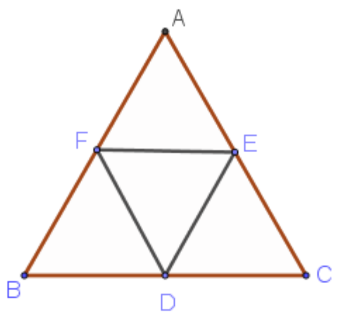
VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
NGUYÊN LÍ DIRICHLET VÀ ỨNG DỤNG – DẠNG 3: SỰ SẮP XẾP – ĐÁP ÁN

www.vinastudy.vn

Bài 1. Bên trong tam giác đều cạnh một đơn vị cho 5 điểm. Chứng minh luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{1}{2}$.

Bài giải:



Xét Δ ABC đều có cạnh bằng 1.

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

Khi đó, ΔABC được chia thành 4 Δ đều có cạnh $\frac{1}{2}$ (*)

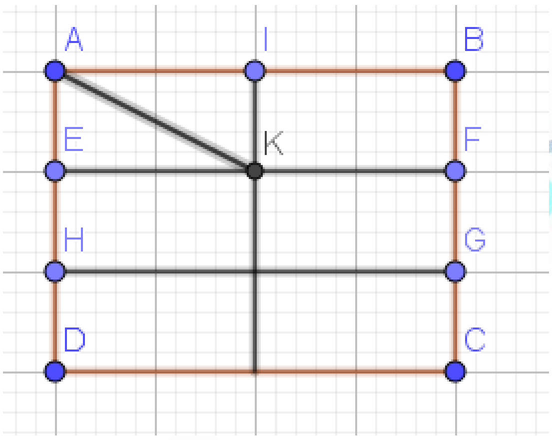
Mà có 5 điểm nằm trong ΔABC đều nên theo nguyên lí Drichlet, $\exists$2 điểm năm trong cùng 1 Δ.

Từ (*) suy ra khoảng cách 2 điểm này $\le \frac{1}{2}$.

Bài 2. Một hình chữ nhật có kích thước 3 x 4 được chia thành 12 hình vuông đơn vị bởi các đường thẳng song song với các cạnh. Chứng minh rằng với 7 điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật, ta luôn có thể chọn ra 2 điểm có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{5}$.

Bài giải:

Ta chia hình chữ nhật 3 x 4 thành 6 hình chữ nhật 1 x 2 như hình vẽ.



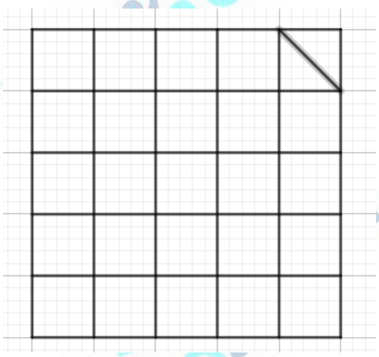
Khoảng cách lớn nhất giữa 2 điểm cùng thuộc hình chữ nhật AIKE là đường chéo AK = $\sqrt{AI^2+IK^2}=\sqrt{5}$

Có 7 điểm mà có 5 đa giác, theo nguyên lý Dirichlet, $\exists \left[\frac{7}{5}\right]+1=2$ điểm cùng nằm trong cùng 1 hình chữ nhật đã cho.

Theo lập luận trên, khoảng cách 2 điểm này không quá $\sqrt{5}$.

<u>**Bài 3.**</u> Bên trong hình vuông cạnh 1m đặt 51 điểm phân biệt. chứng minh tồn tại ít nhất 3 điểm nằm trong một hình vuông có bán kính $\frac{1}{7}$.

Bài giải:



Chia hình vuông đơn vị thành 25 hình vuông con có cạnh bằng $\frac{1}{5}$ như hình vẽ.

Bán kính của 1 hình vuông có độ dài là: $\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow$ Bán kính của 1 hình vuông là: $\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{1}{5\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{49}}=\frac{1}{7}$

Phân 51 điểm vào 25 hình vuông đã cho vì $51 = 25.2 + 1$ nên $\exists$ 3 điểm cùng nằm trong 1 hình vuông.

Do bán kính của 1 hình vuông $< \frac{1}{7}$ nên 3 điểm này cùng nằm trong 1 hình vuông bán kính $\frac{1}{7}$.

Bài 4. Bên trong hình vuông cạnh 1 m đặt 2011 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{2010}m^2$

Bài giải:

Chia hình vuông đã cho thành 1005 hình vuông có kích thước: $1\times\frac{1}{1005}$. Vì có 2011 điểm nên tồn tại $\left[\frac{2011}{1005}\right]+1=3$ điểm thuộc một hình chữ nhật nhỏ. Diện tích tam giác nằm trong hình chữ nhật không vượt quá $\frac{1}{2}$ diện tích của hình chữ nhật.

Vậy tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{2}.\left(1.\frac{1}{1005}\right)=\frac{1}{2010}(m^2)$

VINASTUDY.