

VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 7

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

DẠNG 1: TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN TRONG TAM GIÁC – ĐÁP ÁN

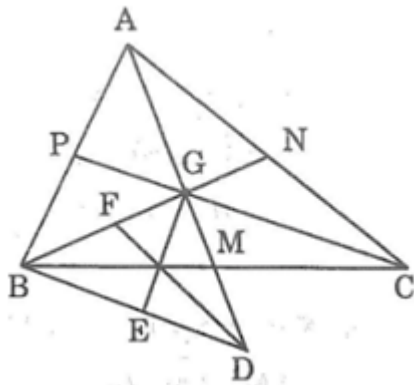
www.vinastudy.vn

Bài 1: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Vẽ điểm D sao cho G là trung điểm của AD. Chứng minh rằng:

a) Các cạnh của tam giác BGD bằng $\frac{2}{3}$ các đường trung tuyến của tam giác ABC

b) Các đường trung tuyến của tam giác BGD bằng một nửa các cạnh của tam giác ABC.

Bài giải:



a. Gọi AM, BN, CP lần lượt là các đường trung tuyến của ΔABC . Các đường trung tuyến cắt nhau tại G.

Ta có: $AG = GD$ (gt)

$AG = 2GM$ (tính chất đường trung tuyến)

Suy ra: $GD = 2GM$

Mà $GD = GM + MD \Rightarrow GM = MD$

Xét ΔBMD và ΔCMG , ta có:

$BM = CM$ (gt)

$\angle(BMD) = \angle(CMG)$ (đối đỉnh)

$MD = GM$ (chứng minh trên)

Suy ra: $\Delta BMD = \Delta CMG$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = CG$ (hai cạnh tương ứng)

Mặt khác: $CG = \frac{2}{3} CP$ (tính chất đường trung tuyến)

Suy ra: $BD = \frac{2}{3} CP$ (1)

Lại có: $BG = \frac{2}{3} BN$ (tính chất đường trung tuyến) (2)

Và $AG = \frac{2}{3} AM$ (tính chất đường trung tuyến)

Suy ra: $GD = \frac{2}{3} AM$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra các cạnh của tam giác BGD bằng $\frac{2}{3}$ các đường trung tuyến của tam giác ABC.

b. Ta có: $GM = MD$ (chứng minh trên)

Suy ra BM là đường trung tuyến của tam giác BGD.

Suy ra: $BM = \frac{1}{2} BC$ (4)

Kẻ đường trung tuyến GE và DF của tam giác BGD, ta có:

$FG = \frac{1}{2} BG$ (tính chất đường trung tuyến)

$GN = \frac{1}{2} GB$ (tính chất đường trung tuyến)

Suy ra: $FG = GN$

Xét $\triangle DFG$ và $\triangle ANG$, ta có:

$AG = GD$ (gt)

$\angle(DGF) = \angle(AGN)$ (đối đỉnh)

$GF = GN$ (chứng minh trên)

Suy ra: $\triangle DFG = \triangle ANG$ (c.g.c) $\Rightarrow DF = AN$

Mà $AN = \frac{1}{2} AC$ (gt)

Suy ra: $DF = \frac{1}{2} AC$ (5)

Mặt khác: $BD = CG$ (chứng minh trên)

$ED = \frac{1}{2} BD$ (vì E là trung điểm BD)

$GP = \frac{1}{2} CG$ (tính chất đường trung tuyến)

Suy ra: $ED = GP$

Lại có: $\triangle BMD = \triangle CMG$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \angle(BDM) = \angle(CGM)$ hay $\angle(EDG) = \angle(CGM)$

$(CGM) = (PGA)$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\angle(EDG) = \angle(PGA)$

$AG = GD$ (gt)

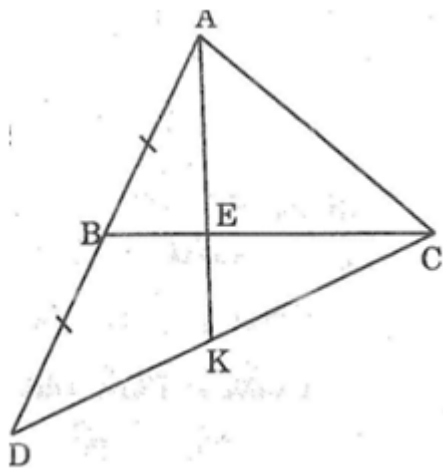
Suy ra: $\triangle PGA = \triangle EDG$ (c.g.c) $\Rightarrow GE = AP$ mà $AP = 1/2 AB$ (gt)

Do đó: $GE = 1/2 AB$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra các đường trung tuyến của $\triangle BGD$ bằng một nửa cạnh của $\triangle ABC$.

Bài 2: Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = \frac{1}{3} BC$. Gọi K là giao điểm của AE và CD . Chứng minh rằng $DK = KC$.

Bài giải:



Trong $\triangle ACD$ ta có:

CB là đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C

Mặt khác:

$E \in BC$ và $BE = 1/2 BC$ (gt)

Nên: $CE = 2/3 CB$

Suy ra: E là trọng tâm của $\triangle ACD$.

Vì AK đi qua E nên AK là đường trung tuyến của $\triangle ACD$

Suy ra K là trung điểm của CD

Vậy $KD = KC$.

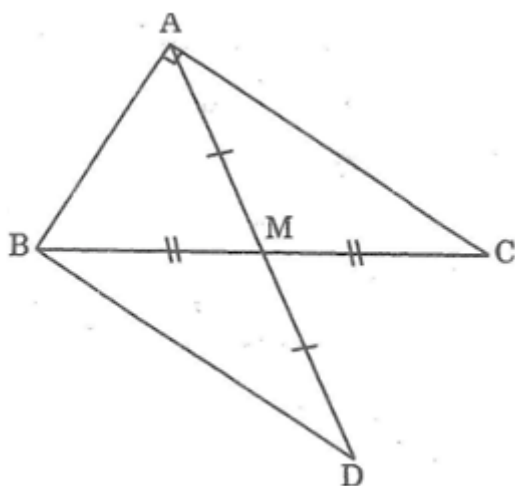
Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm M sao cho $MD = MA$.

a) Tính số đo góc ABD.

b) Chứng minh: $\triangle ABC = \triangle BAD$.

c) So sánh độ dài AM và BC.

Bài giải:



a. Xét $\triangle AMC$ và $\triangle BMD$, ta có:

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\angle(AMB) = \angle(BMC) \text{ (đối đỉnh)}$$

$$AM = MD \text{ (gt)}$$

Suy ra: $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle(MAC) = \angle D \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Suy ra: $AC \parallel BD$

(vì có 2 góc ở vị trí so le trong bằng nhau)

Mà $AB \perp AC$ (gt) nên $AB \perp BD$.

Vậy $\angle ABD = 90^\circ$.

b. Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$ ta có:

AB cạnh chung

$$\angle(BAC) = \angle(ABD) = 90^\circ$$

$$AC = BD \text{ (vì } \triangle AMC = \triangle DMB)$$

Suy ra: $\triangle ABC = \triangle BAD$ (c.g.c)

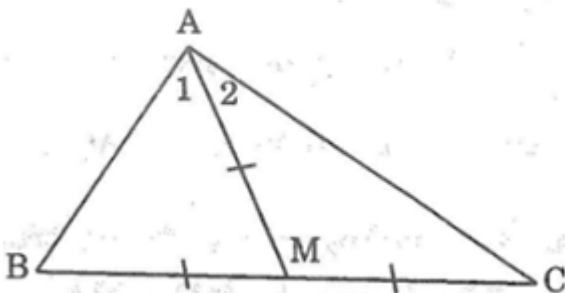
c. Ta có: $\triangle ABC = \triangle BAD \Rightarrow BC = AD$ (2 cạnh tương ứng)

$$\text{Mặt khác: } AM = 1/2 AD$$

$$\text{Vậy } AM = 1/2 BC.$$

Bài 4: Tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng nửa cạnh BC. Chứng minh rằng góc $BAC = 90^\circ$.

Bài giải:



Vì AM là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ nên $BM = MC = 1/2 BC$

Mà $AM = 1/2 BC$ (gt) nên: $AM = BM = MC$.

Tam giác AMB có $AM = MB$ nên $\triangle AMB$ cân tại M

Suy ra: $\angle B = \angle A_1$ (tính chất tam giác cân) (1)

Tam giác AMC có $AM = MC$ nên $\triangle AMC$ cân tại M

Suy ra: $\angle C = \angle A_2$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle A_2 = \angle(BAC)$ (3)

Trong $\triangle ABC$ ta có:

$$\angle B + \angle C + \angle(BAC) = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong tam giác) (4)}$$

Từ (3) và (4) suy ra: $\angle(BAC) + \angle(BAC) = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle(BAC) = 180^\circ$

Hay $\angle(BAC) = 90^\circ$.

Vậy ΔABC vuông tại A.

VINASTUDY.