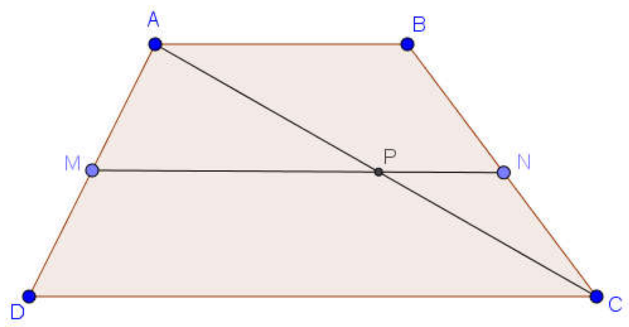
VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

HÌNH THANG – ĐÁP ÁN

Bài 1: Cho hình thang ABCD có M là trung điểm của AD, N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: MN = $\frac{AB+CD}{2}$ và MN // AB.

Bài giải:



+) Gọi P là trung điểm của AC.

Xét Δ ADC ta có:

M là trung điểm của AD; P là trung điểm của AC.

$\Rightarrow$ MP là đường trung bình của ΔADC (đn)

$\Rightarrow$MP // DC và MP = $\frac{1}{2}$ DC (tc) (1)

Xét ΔCAB ta có:

N là trung điểm của CB; P là trung điểm của CA (gt)

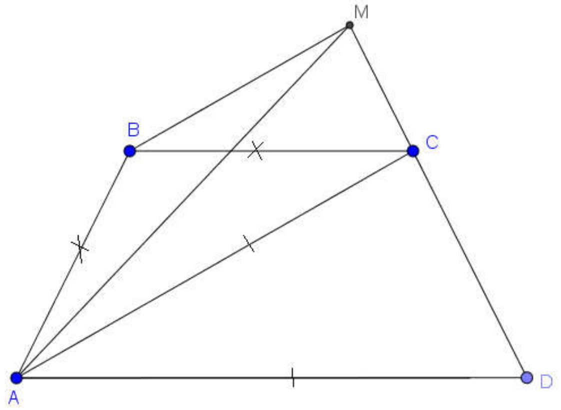
$\Rightarrow$NP là đường trung bình của ΔCAB (đn)

$\Rightarrow$NP // DC và NP = $\frac{1}{2}$ AB (tc) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: M, P, N thẳng hàng và MN // DC; MN = $\frac{AB+CD}{2}$ (đpcm)

Bài 2: Cho hình thang ABCD có AD // BC; AB = BC; AC = AD. Lấy điểm M trên cạnh CD sao cho BM // AC. Chứng minh AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$?

Bài giải:



Vì BC // AD (gt) $\Rightarrow \widehat{MCB} = \widehat{D}$ (hai góc đồng vị)

Lại có: $\widehat{ACD} = \widehat{D}$ (vì Δ ACD cân tại A)

Do đó: $\widehat{MCB} = \widehat{ACD}$

Vì BM // AC (gt) nên $\widehat{BMC} = \widehat{ACD}$ (hai góc đồng vị)

Suy ra: $\widehat{BMC} = \widehat{BCM}$ $\Rightarrow$ ΔBMC cân tại B (đn)

$\Rightarrow$ BM = BC (tc)

Lại có: BA = BC nên BM = BA

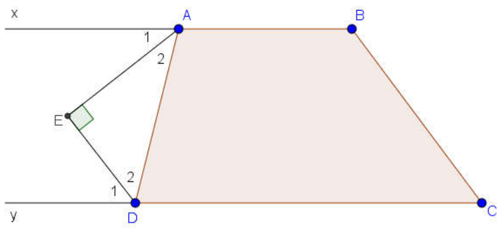
$\Rightarrow$ ΔBAM cân tại B (đn)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BMA}$ (tc) mà $\widehat{BMA} = \widehat{MAC}$ (vì BM // AC)

Nên $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$ hay AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD. Phân giác góc ngoài tại đỉnh A và phân giác góc ngoài tại đỉnh D cắt nhau tại E. Biết ΔADE vuông tại E. Chứng minh rằng: tứ giác ABCD là hình thang.

Bài giải:



Xét Δ EAD vuông tại E ta có: $\widehat{EAD}+\widehat{EDA}=90^0$

Vì AE là tia phân giác của $\widehat{xAD}$ nên $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\frac{1}{2}\widehat{xAD}$

Vì DE là tia phân giác của $\widehat{yAD}$ nên $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}=\frac{1}{2}\widehat{yAD}$

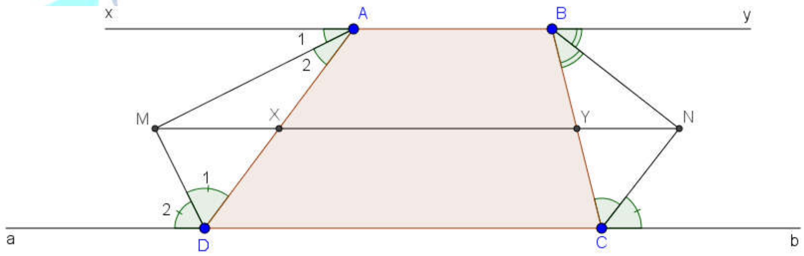
Suy ra: $\widehat{A_2}+\widehat{D_2}=\frac{1}{2}\left(\widehat{xAD}+\widehat{yDA}\right) \Rightarrow \widehat{xAD}+\widehat{yDA}=180^0$

Do đó: AB // DC (hai góc trong cùng phía bù nhau)

Vậy ABCD là hình thang.

Bài 4: Cho hình thang ABCD có AB // CD. Phân giác ngoài tại đỉnh A và phân giác ngoài tại đỉnh D cắt nhau tại M. Phân giác ngoài tại đỉnh B và phân giác ngoài tại đỉnh C cắt nhau tại N. Chứng minh rằng: MN // AB và MN = $\frac{AB+BC+CD+DA}{2}$

Bài giải:



a) Gọi X là trung điểm của AD; Y là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ XY là đường trung bình của hình thang ABCD (đn)

$\Rightarrow$XY // AB và XY = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) (tc)

Ta có: AM là tia phân giác của $\widehat{xAD}$ nên $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\frac{\widehat{xAD}}{2}$

DM là tia phân giác của $\widehat{xDA}$ nên $\widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \frac{\widehat{aDA}}{2}$

Do đó: $\widehat{A_2} + \widehat{D_1} = 90^0 = \frac{1}{2}\left(\widehat{xAD} + \widehat{aAD}\right) = \frac{1}{2}.180^0 = 90^0$ suy ra Δ MAD vuông tại M

Tương tự ta có: ΔNBC vuông tại N.

Xét ΔMAD vuông tại M ta có: X là trung điểm của AD (gt)

$\Rightarrow$ MX = XA = XD = $\frac{1}{2}$ AD (tc đường trung tuyến)

$\Rightarrow \Delta$ XAM cân tại X (đn)

$\Rightarrow \widehat{XMA} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{XMA}$. Suy ra: MX // Ax.

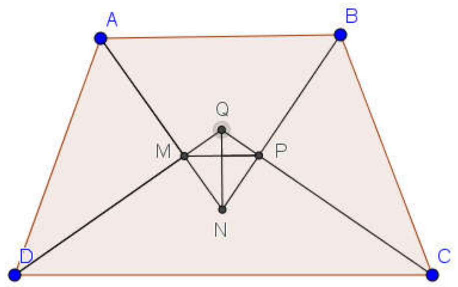
Chứng minh tương tự ta có: NY // AB.

Lại có: XY // AB do đó: M, X, Y, N thẳng hàng và MN // AB.

Và MN = MX + XY + YN = $\frac{1}{2}$ (DA + AB + BC + CD)

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có phân giác trong của $\widehat{A}$ và phân giác trong của $\widehat{D}$ cắt nhau tại M, tia phân giác trong của $\widehat{A}$ và tia phân giác trong của $\widehat{B}$ cắt nhau tại N. Tia phân giác trong của $\widehat{B}$ và tia phân giác trong của $\widehat{C}$ cắt nhau tại P, tia phân giác trong của $\widehat{C}$ và tia phân giác trong của $\widehat{D}$ cắt nhau tại Q. Biết MP $\perp$ NQ. Chứng minh rằng: ABCD là hình thang cân.

Bài giải:



+) Gọi O là giao điểm của QN và MP

Ta có: $MQ^2 = OQ^2 + OM^2$; $NP^2 = OP^2 + ON^2$

$MN^2 = OM^2 + ON^2$; $PQ^2 = OQ^2 + OP^2$

Suy ra: $MQ^2 + NP^2 = MN^2 + PQ^2 = OM^2 + ON^2 + OQ^2 + OP^2$ (1)

+) Áp dụng bài trên ta có: ΔMAD vuông tại M; ΔPBC vuông tại P.

Và MP // DC.

+) Xét ΔMQN vuông tại M ta có: $MQ^2 + MN^2 = QN^2$

Xét ΔPQN vuông tại P ta có: $PQ^2 + PN^2 = QN^2$

Suy ra: $MQ^2 + MN^2 = PQ^2 + PN^2$ (2)

Trừ vế với vế của (1) và (2) ta được: $NP^2 - MN^2 = MN^2 - PN^2$

$\Rightarrow 2PN^2 = 2MN^2$ $\Rightarrow PN = MN$

Suy ra: MQ = PQ $\Rightarrow$ ΔQMP cân tại Q (đn)

$\Rightarrow \widehat{QMP} = \widehat{QPM}$

Mà: MP // DC nên $\widehat{QMP} = \widehat{QDC}$; $\widehat{QPM} = \widehat{QCD}$ do đó: $\widehat{QDC} = \widehat{QCD}$

Hay $\frac{1}{2}\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{BCD}$

Suy ra: $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

Vậy hình thang ABCD là hình thang cân.

VINASTUDY.VN