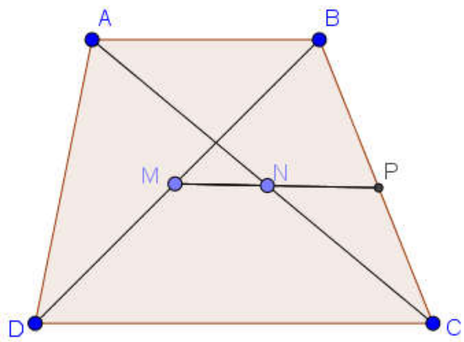
VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8

GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG

ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG – ĐÁP ÁN

Bài 1: Cho hình thang ABCD có M là trung điểm của BD, N là trung điểm của AC. Chứng minh rằng: MN // AB // CD và MN = $\frac{CD-AB}{2}$.

Bài giải:



Gọi P là trung điểm của BC.

+) Xét ΔCAB ta có: P là trung điểm của CB; N là trung điểm của CA.

$\Rightarrow$ PN là đường trung bình của ΔCAB.

$\Rightarrow$ PN // AB; PN = $\frac{1}{2}$ AB (tc) (1)

+) Xét ΔBDC ta có: M là trung điểm của BD; P là trung điểm của BC.

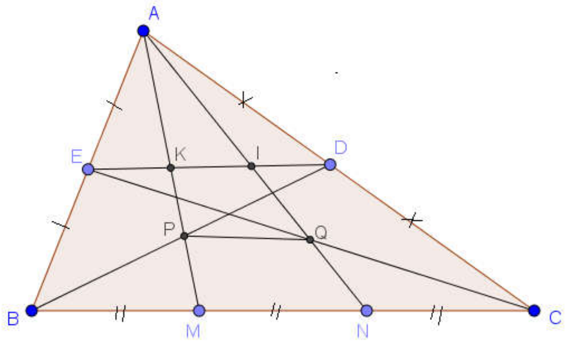
$\Rightarrow$ MP là đường trung bình của ΔBDC (đn)

$\Rightarrow$ MP // DC; MP = $\frac{1}{2}$ DC (tc). Mà: DC // AB nên MP // AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra: M, N, P thẳng hàng và MP – NP = $\frac{1}{2}$ (DC – AB) = MN (đpcm)

Bài 2: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M, N sao cho BM = MN = NC. Gọi D, E là trung điểm của AC, AB. Gọi P là giao điểm của AM và BD, Q là giao điểm của AN và CE. Chứng minh: PQ = $\frac{BC}{4}$

Bài giải:



Gọi K, I là giao điểm của AM, AN với ED.

+) Xét Δ ABC ta có:

E là trung điểm của AB, D là trung điểm của AC (gt)

$\Rightarrow$ ED là đường trung bình của ΔABC (đn)

$\Rightarrow$ ED // BC; ED = $\frac{1}{2}$ BC (tc)

+) Xét ΔABM ta có:

E là trung điểm của AB (gt); EK // BM (cmt)

$\Rightarrow$ K là trung điểm của AM (đn)

$\Rightarrow$ EK là đường trung bình của ΔABM (đn)

$\Rightarrow$ EK // BM; EK = $\frac{1}{2}$ BM (tc)

+) Chứng minh tương tự: KI = $\frac{1}{2}$ MN; ID = $\frac{1}{2}$ NC

Mà: BM = MN = NC nên EK = KI = ID.

Do đó: HI + ID = 2.KI = 2.KE = BM

+) Xét ΔBPM và ΔDPK ta có:

KD = BM; $\widehat{PBM} = \widehat{PDK}$ (vì ED // BC); $\widehat{PMB} = \widehat{PKD}$ (vì ED // BC).

$\Rightarrow$ $\Delta BPM = \Delta DPK$ (g – c – g)

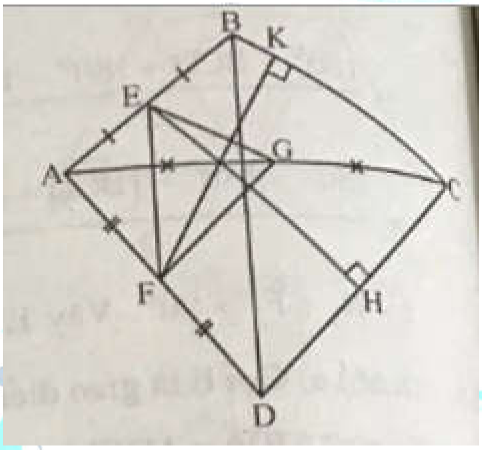
$\Rightarrow$ BP = PD hay P là trung điểm của BD.

Chứng minh tương tự ta có: Q là trung điểm của EC.

Suy ra: PQ = $\frac{1}{2}$ (BC – EQ) = $\frac{1}{2}\left(BC-\frac{1}{2}BC\right)=\frac{1}{4}BC$

Bài 3: Cho tứ giác ABCD có AC ⊥ BD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Kẻ EH ⊥ CD tại H. Kẻ FK ⊥ BC tại K. Chứng minh: AC, EH, FK đồng quy.

Bài giải:



Gọi G là trung điểm của AC.

Ta có: EG; EF; FG lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC; ABD; ACD.

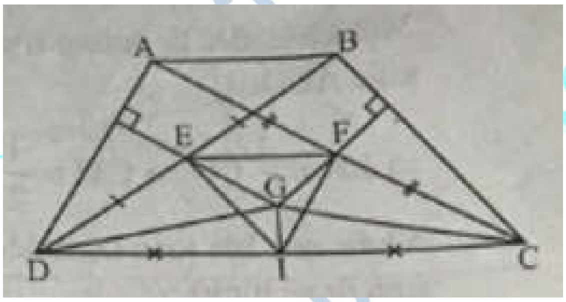
⇒ EF // BD; EG // BC; FG // DC.

Mà AC ⊥ BD; FK ⊥ BC; EH ⊥ CD nên AC ⊥ EF; FK ⊥ EG; EH ⊥ FG.

Từ đó suy ra: AC, EH, FK chứa đường cao của tam giác EFG, do vậy AC, EH, FK đồng quy.

Bài 4: Cho hình thang ABCD (AB // CD) có E, F là trung điểm của BD, AC. Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC. Chứng minh: GD = GC.

Bài giải:



Gọi I là trung điểm của DF.

Ta có: EI, FI lần lượt là đường trung bình của Δ BCD và Δ ACD

$\Rightarrow$ EI // BC; FI // AD.

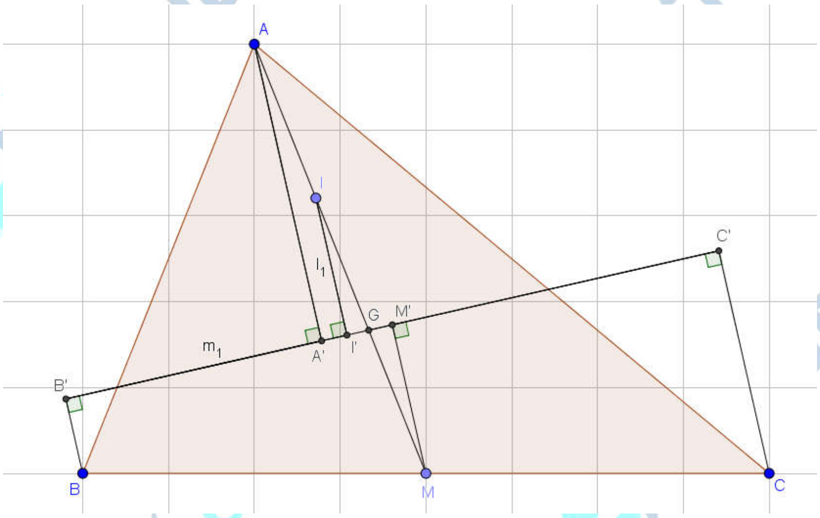
Mà: EG $\perp$ AD; FG $\perp$ BC nên EG $\perp$ FI; FG $\perp$ EI.

Suy ra: G là trực tâm ΔEIF, suy ra: GI $\perp$CD.

Lại có: ID = IC, suy ra: ΔGCD cân tại G suy ra: GC = GD.

Bài 5: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d qua G, cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d. Chứng minh: AA' = BB' + CC'.

Bài giải:



+) Gọi M là trung điểm của BC.

Lấy điểm I trên đường trung tuyến AM sao cho I là trung điểm của AG.

Gọi I' là hình chiếu của I trên đường thẳng d; M' là hình chiếu của M trên đường thẳng d.

$\Rightarrow AI = IG = \frac{1}{2}AG$

Mà: G là trọng tâm của tam giác ABC nên GM = $\frac{1}{2}$ AG.

Suy ra: IG = GM.

+) Xét ΔAA'G ta có:

I là trung điểm của AG (gt)

II' // AA' (cùng vuông góc với d)

$\Rightarrow$ I' là trung điểm của AG (tc)

$\Rightarrow$ II' là đường trung bình của ΔAA'G (đn)

$\Rightarrow$ II' = $\frac{1}{2}$ AA' (tc) (1)

+) Xét Δ II'G vuông tại I' và ΔMM'G vuông tại M' ta có:

IG = GM; $\widehat{IGI'} = \widehat{MGM'}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow$ Δ II'G = ΔMM'G (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow$ II' = MM' (hai canh tương ứng) (2)

+) Xét tứ giác BB'C'C ta có:

BB' $\perp$ d; CC' $\perp$ d (gt) nên BB' // CC'

$\Rightarrow$ BB'C'C là hình thang.

Lại có: MM' // BB' (cùng vuông góc với d)

Và M là trung điểm của BC (gt) nên M' là trung điểm cảu B'C'

$\Rightarrow$MM' là đường trung bình của hình thang BB'C'C (đn) $\Rightarrow$MM' = $\frac{BB'+CC'}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: AA' = BB' + CC'

VINASTUDY.VN