VINA 3 – BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
GIÁO VIÊN: NGUYỄN THÀNH LONG
HÌNH VUÔNG - ĐÁP ÁN

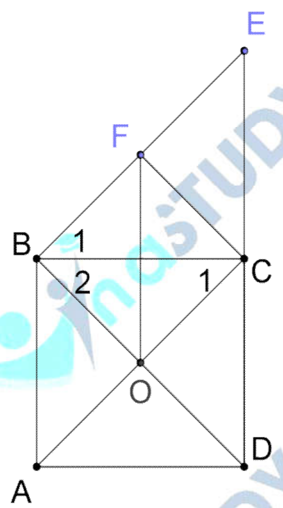
Bài 1: Cho hình vuông ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Từ B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC tại E. Gọi F là trung điểm của BE. Chứng minh:

a) Δ BDE vuông cân.

b) Tứ giác BOCF là hình vuông.

c) Tứ giác CDOF là hình bình hành.

Bài giải:



a) ABCD là hình vuông (gt) nên:

$\widehat{C_1} = 45^0$; $\widehat{B_2} = 45^0$

BE // AC (gt) nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 45^0$

Vì thế: $\widehat{DBE} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 45^0 + 45^0 = 90^0$

$\Rightarrow \Delta$ BCE = Δ BCD (c.g.c)

$\Rightarrow$ BE = BD

Vậy Δ BED vuông cân tại B.

b) $\Delta BCE = \Delta BCD$ (cmt)

$\Rightarrow$ CE = CD

$\Rightarrow$ CF là đường trung bình của ΔEBD.

$\Rightarrow$ CF // BD; CF = $\frac{1}{2}$ BD

$\Rightarrow$ CF // BO; CF = BO

Do đó tứ giác BOCF là hình bình hành.

Mà: OB = CO và $\widehat{BOC} = 90^0$ (do ABCD là hình vuông) nên tứ giác BOCF là hình thoi có một góc vuông.

$\Rightarrow$ tứ giác BOCF là hình vuông.

c)Ta có: CF // BD: CF = $\frac{1}{2}$ BD (cmt)

$\Rightarrow$ CF // OD; CF = OD

$\Rightarrow$ tứ giác CDOF là hình bình hành.

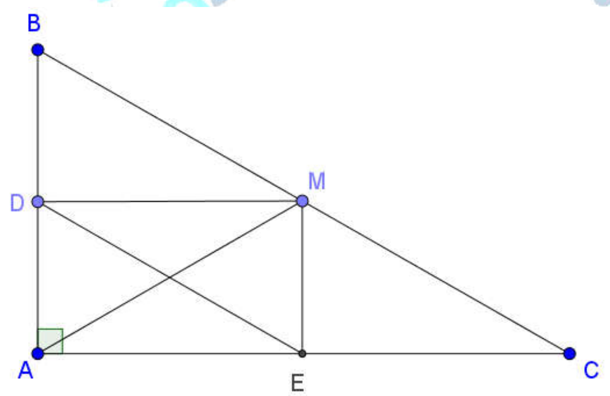
Bài 2: Cho Δ ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) Chứng minh: ADME là hình chữ nhật.

b) Chứng minh: ΔAMC cân. Biết AB = 4 cm; AC = 3 cm. Tính AM.

c) Tìm điều kiện của ΔABC để tứ giác ADME là hình vuông.

Bài giải:



a) Xét Δ ABC vuông tại A ta có:

Trung tuyến AM (gt) $\Rightarrow$ AM = MB = MC (tc)

$\Rightarrow$ ΔMAB cân tại M (đn)

D là trung điểm của AB $\Rightarrow$ MQ $\perp$ AB

Chứng minh tương tự ta được: ME $\perp$ AC

Xét tứ giác ADME ta có:

$\widehat{ADM} = \widehat{DAE} = \widehat{AEM} = 90^0$

Do đó tứ giác ADME là hình chữ nhật (đn)

b) Ta có: AM = MC nên ΔAMC cân tại M.

+) Ta có: AD = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}.4 = 2$

AE = $\frac{1}{2}$ AC $= \frac{3}{2}$

Xét ΔADE vuông tại A ta có:

$$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} \text{ (cm)}$$

Vì ADME là hình chữ nhật nên AM = DE = $\frac{5}{2}$ (cm)

c) Để ADME là hình vuông thì AD = AE nên AB = AC

Vậy ABC là tam giác vuông cân.

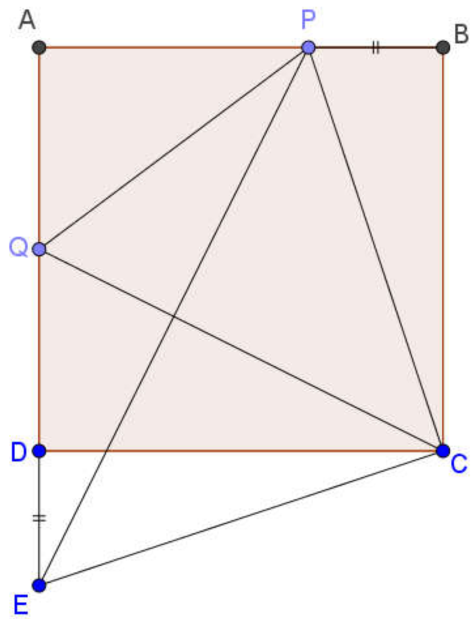
Bài 3: Cho hình vuông ABCD có độ dài bằng 1. Trên các cạnh AB và AD lấy P và Q sao cho chu vi của tam giác APQ bằng 2.

a) Chứng minh rằng: PQ = PB + DQ

b) Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho BP = DE. CMR: PE $\perp$ CQ.

c) Chứng minh rằng: $\widehat{PCQ} = 45^0$

Bài giải:



a) Ta có: AP + AQ + PQ = 2 = AB + AD

$\Rightarrow$ PQ = AB + AD – AP – AQ = (AB – AP) + (AD – AQ) = BP + DQ

b) Ta có: PQ = BP + DQ = DE + DQ = QE (vì DE = BP)

+) Xét ΔCPB vuông tại B và ΔCED vuông tại D ta có:

CB = CD (vì ABCD là hình vuông)

PB = DE (gt)

$\Rightarrow$ ΔCPB = ΔCED (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ CP = CE; $\widehat{BCP} = \widehat{DCE}$

+) Ta có: CP = CE; DP = DE nên CQ là đường trung trực của đoạn thẳng PE

$\Rightarrow$ CQ $\perp$ PE

c) +) Ta có: $\widehat{BCP} + \widehat{PCD} = 90^0$ do đó: $\widehat{ECD} + \widehat{DCP} = 90^0 = \widehat{ECP}$

Xét ΔPCQ và ΔECQ ta có:

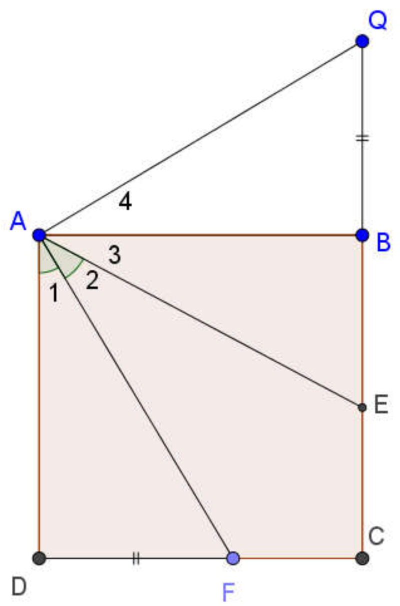
CP = CE; PQ = ED; CQ chung

$\Rightarrow$ ΔPCQ = ΔECQ (c – c – c)

$\Rightarrow \widehat{CPQ} = \widehat{ECQ} = \dfrac{1}{2}\widehat{ECP} = \dfrac{1}{2}.90^0 = 45^0$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, các điểm E, F trên cạnh BC, CD sao cho $\widehat{EAF} = \widehat{FAD}$. Chứng minh rằng: AE = BE + DF.

Bài giải:



Trên tia đối của tia BC lấy điểm Q sao cho DF = BQ

+) Xét Δ ADF vuông tại D và ΔABQ vuông tại B ta có:

BQ = DF; AB = AD

$\Rightarrow$ Δ ADF = ΔABQ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_4}$; $\widehat{AFD} = \widehat{AQB}$ (1)

Ta có: $\widehat{FAB} = \widehat{AFD}$ (hai góc so le trong của AB // CD)

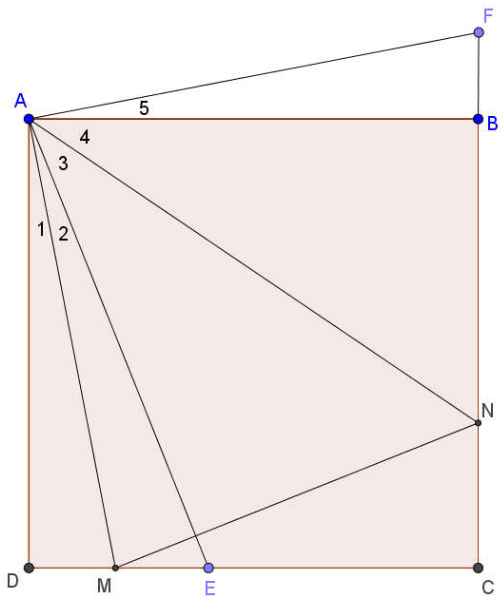
$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A_4} + \widehat{A_3} = \widehat{QAE}$ (vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \widehat{A_4}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{QAE} = \widehat{AQE}$ nên Δ EAQ cân tại E

$\Rightarrow$ AE = EQ = EB + BQ = EB + DF (đpcm)

Bài 5: Cho hình vuông ABCD. E là điểm bất kì thuộc cạnh CD. Vẽ tia phân giác của $\widehat{EAD}$ cắt CD tại M. Vẽ tia phân giác $\widehat{EAB}$ cắt BC tại N. Chứng minh rằng: MN $\perp$ AE.

Bài giải:



Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho BF = DM

+) Xét Δ ABF vuông tại B và Δ ADM ta có:

AD = AB; BF = DM

$\Rightarrow$ ΔABF = ΔADM (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow$ AF = AM; $\widehat{A_1} = \widehat{A_5}$

+) Xét ΔAMN và ΔAFN ta có:

AF = AM' AN chung; $\widehat{MAN} = \widehat{FAN}$ (vì $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{A_5} + \widehat{A_4}$)

$\Rightarrow$ ΔAMN = ΔAFN (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ANF}$

Mà: $\widehat{ANF} + \widehat{A_4} = 90^0$; $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ nên $\widehat{A_3} + \widehat{ANM} = 90^0$

Hay AE $\perp$ MN

VINASTUDY.VN