

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**

**TÌM X ĐỂ BIỂU THỨC SAU RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN (tiếp) – CẤP BẬC BA**  
Tài liệu lớp học trực tiếp 9A0.1 – 18h – 21h – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**TÌM X ĐỂ BIỂU THỨC SAU RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN (tiếp)**

**Câu 3.** Cho biểu thức

$$P = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 - \sqrt{y})} - \frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)} - \frac{xy}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{y})}$$

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn phương trình  $P = 2$ .

**Câu 4.** Cho biểu thức  $A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$  ( $x \geq 0; x \neq 1$ ). Tìm  $x$  nguyên để  $A$  nguyên.

**Câu 5 (BTVN).** Cho biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6}\right) \quad (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9).$$

Tìm  $x$  nguyên để  $A$  nguyên ( $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ )

**Câu 6 (BTVN).** Cho  $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$  và  $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 2$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

c) Tìm  $x$  sao cho  $C = -A.B$  nhận giá trị là số nguyên ( $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ )

**Câu 7 (BTVN).** Cho biểu thức  $M = \frac{2x}{3\sqrt{x} + 1}$ . Tìm  $x$  nguyên để  $A$  nguyên.

**Câu 8.** Cho  $A = \frac{2\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 1}$ . Tìm  $x$  để  $A$  nguyên.

**Câu 9.** Cho  $A = \frac{3\sqrt{x}}{5\sqrt{x} + 1}$ . Tìm  $x$  để  $A$  nguyên.

**Câu 10.** Cho  $P = \frac{2x - 1}{\sqrt{x} + 1}$ . Tìm  $x$  để  $P$  nhận các giá trị nguyên nhỏ hơn 2.

Câu 11. Cho biểu thức  $P = \frac{-3x-2}{2\sqrt{x+1}}$ . Tìm x để P nhận các giá trị nguyên thỏa mãn  $P \geq -3$ .

### CĂN BẬC BA

$$+ (\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$+ a \leq b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b}$$

$$+ \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}; \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} (b \neq 0).$$

Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba, dạng  $A = \sqrt[3]{a+b\sqrt{c}} \pm \sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}$ .

Kiến thức liên quan:

- $\sqrt[3]{A^3} = A$ .
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a+b)$ .
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a^3 - b^3) - 3ab(a-b)$ .

**Phương pháp 1:** Vận dụng hằng đẳng thức bậc 3 để đưa  $a+b\sqrt{c}$  và  $a-b\sqrt{c}$  về lũy thừa bậc 3.

$$\text{Khi đó } A = \sqrt[3]{(m+n\sqrt{c})^3} \pm \sqrt[3]{(m-n\sqrt{c})^3} = (m+n\sqrt{c}) \pm (m-n\sqrt{c}).$$

VD: Rút gọn  $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ .

**Phương pháp 2:** Mũ ba hai vế và đưa về giải phương trình bậc ba.

Vẫn với ví dụ trên, rút gọn:  $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ .

**Chú ý:** Từ phương pháp 2, ta có một bài toán là: Chứng minh một biểu thức dạng

$x = \sqrt{a+b\sqrt{c}} + \sqrt{a-b\sqrt{c}}$  hay  $x = \sqrt[3]{a+b\sqrt{c}} \pm \sqrt[3]{a-b\sqrt{c}}$  là nghiệm của một phương trình bậc hai hay bậc ba. Cách làm là lũy thừa bậc hai hay bậc ba như trên ta có phương trình của đề bài.

VD: Chứng minh  $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$  là nghiệm của phương trình  $x^3 - 3x - 18 = 0$ .

### Bài tập

Câu 1. Tính  $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$ .

Câu 2. Rút gọn  $A = \sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$ .

Câu 3. Tính  $Q = \sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ .

Câu 4. Chứng minh tổng:  $\sqrt[3]{18-5\sqrt{13}} + \sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}$  là một số nguyên tố.

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**ĐƯỜNG TRÒN**

Tài liệu lớp học trực tiếp 9A0.1 – 18h – 21h – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**A. Lý thuyết**

- **Mối quan hệ giữa Dây cung và đường kính**
- **Liên hệ giữa Dây và khoảng cách từ tâm đến Dây**
- **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn**
- **Tiếp tuyến của đường tròn, góc giữa tiếp tuyến và dây cung**
- **Vị trí tương đối của 2 đường tròn, tiếp tuyến chung ngoài/trong của 2 đường tròn.**

**B. Bài tập vận dụng:**

**Câu 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường tròn (B; BA) và (C; CA) cắt nhau tại điểm thứ hai D (khác A). Vẽ đường kính DCE của đường tròn (C). Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại E cắt BA ở K. Chứng minh rằng CK vuông góc với BC.

**Câu 2.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O). M là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

**Câu 3.** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AD. Trên nửa đường tròn lấy 2 điểm B và C. Biết  $AB = BC = 2\sqrt{5}$  cm,  $CD = 6$ cm. Tính bán kính đường tròn.

**Câu 4.** Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD ( $CD < AB$ ). Các đường vuông góc với CD tại C và D cắt AB tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng  $AM = BN$ .

**Câu 5.** Cho đường tròn (O), dây AB và dây CD,  $AB < CD$ . Giao điểm K của các đường thẳng AB, CD nằm ngoài đường tròn. Đường tròn (O; OK) cắt KA và KC tại M và N. Chứng minh rằng  $KM < KN$ .

**Câu 6.** Cho hai đường tròn (O; 5cm) và (O'; 2cm),  $OO' = 9$ cm. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB,  $A \in (O), B \in (O')$ . Gọi I là giao điểm của AB và  $OO'$ . Tính độ dài OI.

**Câu 7.** Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho  $\widehat{CAB} = 30^\circ$ . Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho  $BM = R$ . Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Câu 8.** Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm của đường tròn với AC, AB theo thứ tự là D, E. Cho  $BC = a, AC = b, AB = c$ .

a) Tính độ dài các đoạn thẳng AD, AE theo a, b, c.

b) Tính AI theo a, b, c

**Câu 9.** Tính diện tích tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (I; r).

**Câu 10.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính bán kính của đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC, biết  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$

**Câu 11.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở A, OO' cắt (O) ở B (khác A), cắt (O') ở C (khác A), DE là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn,  $D \in (O)$ ,  $E \in (O')$ . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BD và CE. CMR: MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

**Câu 12.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn cũng là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.

**Câu 13.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi I là trung điểm của OO'. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA, cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D (khác A). Chứng minh rằng  $AC = AD$ .

**Câu 14.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó O' nằm trên đường tròn (O). Kẻ đường kính O'OC của đường tròn (O). Đường vuông góc với AO' tại O' cắt CB ở I. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng O'B ở K. Chứng minh rằng ba điểm O, I, K thẳng hàng.