

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN LỚP 9
LIÊN HỆ PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG
Giáo viên: Trần Ngọc Hà

Họ và tên: Ngày học:

A. Lí thuyết.

*** Khai phương một tích:**

- Với A, B không âm, ta có : $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$

Ví dụ : $\sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9} = 2.3 = 6$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Đặc biệt : Với $A \geq 0$ ta có $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

Công thức trên có thể dùng để áp dụng với nhiều số không âm tức

$$\text{Với } A, B, C, D, \dots \geq 0 \text{ thì } \sqrt{A.B.C.D, \dots} = \sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}.\sqrt{D}, \dots$$

Sai lầm cần tránh : Nếu không có điều kiện A và B không âm thì không được viết đẳng thức trên.

*** Quy tắc nhân các căn bậc hai:**

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

VD: $\sqrt{5}.\sqrt{20} = \sqrt{5.20} = \sqrt{100} = 10.$

B. Bài tập.

1. Dạng 1. Áp dụng quy tắc nhân, khai phương tính hợp lí.

Câu 1.

- a) $\sqrt{10}.\sqrt{40}$ b) $\sqrt{5}.\sqrt{45}$ c) $\sqrt{52}.\sqrt{13}$ d) $\sqrt{2}.\sqrt{162}$

Câu 2.

- a) $\sqrt{45.80}$ b) $\sqrt{75.48}$ c) $\sqrt{90.6,4}$ d) $\sqrt{2,5.14,4}$

Câu 3.

a) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ b) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$

Câu 4. Biểu diễn $\sqrt{a.b}$ dưới dạng tích các căn bậc hai với $a; b < 0$.

Áp dụng tính $\sqrt{(-16).(-49)}$

Câu 5. Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt{9(a-1)^2}$ với $a \geq 1$; b) $\sqrt{4(2-a)^2}$ với $a \geq 2$;

c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$; d) $\sqrt{b^4(b-1)^2}$ với $b < 0$.

Câu 6. Rút gọn

a) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ b) $B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c) $C = \sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7}$ d) $D = \sqrt{11-6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

e) $E = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + 3 + \sqrt{2}$ f) $F = \sqrt{29-4\sqrt{7}} + \sqrt{23+8\sqrt{7}}$

g) $G = \sqrt{12+2\sqrt{11}} + \sqrt{12-2\sqrt{11}}$ h) $H = (3-\sqrt{2}).\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

Câu 7. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$

Câu 8. Rút gọn

a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$ b) $C = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

Câu 9. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = x - 2 - \sqrt{4 - 4x + x^2}, x > 2$

b) $B = 3 - x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}, x \geq -3$

c) $C = 2x - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

2. Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.

Câu 10. Chứng minh

a) $\sqrt{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9+\sqrt{17}} = 8$

b) $\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nếu } x \geq 2 \\ 2 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

Câu 11. Chứng minh số sau là số nguyên $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7}+4\sqrt{3}}}}$

3. Dạng 3. So sánh.

Câu 12. So sánh

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$

b) $2 + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

c) $\sqrt{17.19}$ và 18

d) $\sqrt{15} + \sqrt{7}$ và 8

Câu 13. So sánh $\sqrt{2021} + \sqrt{2023}$ và $2\sqrt{2022}$

Câu 14. Chứng minh $B = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$ không là số nguyên.

Câu 15. Chứng minh

a) Với $a, b > 0$ thì $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) Với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$

4. Dạng 4: Tìm x

Câu 16. Tìm ĐK xác định của các biểu thức rồi đưa các biểu thức về dạng tích

a) $A = \sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x-1}$

b) $3\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2-9}$

Câu 17. Tìm x

a) $\sqrt{x-5} = 3$

b) $\sqrt{x-10} = -3$

c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$

5. Dạng 5. Tìm GTNN

Câu 18. Tìm GTNN của biểu thức

a) $A = \sqrt{2x+1} + 3$

b) $B = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 6$

Câu 19. Tìm GTLN của biểu thức

a) $A = 2 - \sqrt{2x + \frac{1}{2}}$

b) $B = \frac{3}{4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

Câu 20. Tìm GTNN của biểu thức $A = \sqrt{(2020-x)^2} + \sqrt{(2019-x)^2}$

Câu 21. Tìm GTNN của biểu thức $B = \sqrt{1-6x+9x^2} + \sqrt{9x^2-12x+4}$

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN LỚP 9
LUYỆN TẬP HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG
Giáo viên: Trần Ngọc Hà

Họ và tên: Ngày học:

Câu 1. Cho ΔABC vuông tại A. Đường cao AH. Biết $AC = 12\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$.

- Tính HA, HB, HC.
- Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của H lần lượt lên AB, AC. Chứng minh: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$. Chứng minh: $HE^2 + HF^2 = HB \cdot HC$.

Câu 2. Cho hình thang ABCD có $A = D = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O.

- Chứng minh $AD^2 = AB \cdot CD$.
- Cho $AB = 9\text{ cm}$, $CD = 16\text{ cm}$. Tính diện tích hình thang ABCD. Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC, 2 đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AMC = ANB = 90^\circ$. CMR: $AM = AN$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. HE; HF lần lượt là các đường cao của tam giác AHB và tam giác AHC. Chứng minh $BC^2 = 3AH^2 + BE^2 + CF^2$.

Câu 5. Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD ở I. Biết $IB = 10\sqrt{5}\text{ cm}$, $ID = 5\sqrt{5}\text{ cm}$, tính diện tích tam giác ABC.

Câu 6. Cho ΔABC vuông tại A. Đường cao AH, kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC.

a) Chứng minh $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b) Chứng minh $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$

Câu 7. Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết $IB = \sqrt{5}\text{ cm}$, $IC = \sqrt{10}\text{ cm}$. Tính các độ dài AB, AC.

Câu 8. Tam giác ABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác của góc A và góc B. Biết $IA = 2\sqrt{5}\text{ cm}$, $IB = 3\text{ cm}$. Tính độ dài AB.

Câu 9. Cho hình thang ABCD có $B = C = 90^\circ$. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}\text{ cm}$, $HA = 3\text{ cm}$. Chứng minh:

a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$

b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $DB = 30\text{cm}$, $DC = 40\text{cm}$, tính diện tích tam giác AHD.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Chứng minh rằng: $\sqrt{HB.HC} = \sqrt[3]{BD.CE.BC}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BE và CF vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Câu 13. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia DC lấy điểm M, trên tia đối của tia CD lấy điểm N sao cho $DM = CN$ và $AM \perp AN$. Cho biết $MN = 10\text{cm}$, tính diện tích hình vuông.

Câu 14. Cho hai điểm A, B cố định và điểm M di động sao cho tam giác MAB có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác MAB và K là chân đường cao vẽ từ M của tam giác MAB. Tìm giá trị lớn nhất của tích $KH.KM$.

Câu 15. Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua I dựng đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC tại M và N. Chứng minh rằng :

a) $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$

b) $BM.AC + CN.AB + AI^2 = AB.AC$