

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9
RÚT GỌN BIỂU THỨC CĂN BẬC HAI CHỨA CHỮ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN
Giáo viên: Trần Ngọc Hà
Tài liệu lớp học trực tiếp 9A0.1- 18h – 21h – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:Ngày học:

Trình tự thực hiện bài toán rút gọn:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định: Biểu thức trong căn không âm và mẫu thức khác 0
- Bước 2: Phân tích tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức thành tích và rút gọn (nếu có thể)
- Bước 3: Quy đồng và tính toán như với các phân thức
- Bước 4: Rút gọn biểu thức cuối cùng.

Kiến thức liên quan

- Bất đẳng thức
- Phương trình, Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Dạng 1. Rút gọn biểu thức chứa căn và tính giá trị của biểu thức

Câu 1. Cho $A = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A biết $|x-1|=5$

Câu 2. Cho $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

a) Rút gọn B

b) Tính giá trị của A , biết $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa căn và tìm x thỏa mãn phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức

Câu 3. Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$. Rút gọn biểu thức B và tìm tất cả các giá trị

nguyên của x để $B > \frac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$. Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$

Câu 5. Cho $A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right]$

a) Rút gọn A .

b) Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. Chứng minh rằng $B > 1$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức chứa căn và bài toán số học

Câu 6. Cho $A = \left(\frac{6x+4}{3\sqrt{3x^3}-8} - \frac{\sqrt{3x}}{3x+2\sqrt{3x}+4} \right) \left(\frac{1+3\sqrt{3x^3}}{1+\sqrt{3x}} - \sqrt{3x} \right)$

a) Rút gọn A

b) Tìm x nguyên để A có giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm x nguyên để A nguyên.

Câu 7. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

c) Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Dạng 4. Rút gọn biểu thức chứa căn và bài toán bất đẳng thức, GTLN, GTNN

Câu 8. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Câu 9. Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) - 1$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P \leq 0$.

c) Tìm x để \sqrt{P} đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 10. Cho hai biểu thức: $P = \frac{x+4\sqrt{x}+13}{3\sqrt{x}+1}$ và $Q = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{12\sqrt{x}+4}{x-4}$ với $x > 0, x$ khác 4.

a) Tính giá trị của P khi $x = 9$

b) Rút gọn biểu thức Q

c) Tìm giá trị x để biểu thức $P.Q$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập về nhà

Câu 11. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tính giá trị của A khi $|a - 1| = 1$

Câu 12. Cho $A = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 6\sqrt{x} + 4}{x - 4}$ ($x \geq 0, x \neq 4$)

- a) Rút gọn A
b) Tính giá trị của A , khi $x = 9 + 4\sqrt{5}$

Câu 13. Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{2}$ ($x \geq 0; x \neq 4$)

- a) Rút gọn A
b) Tìm x để $A = \frac{2\sqrt{x} - 3}{6}$

Câu 14. Cho biểu thức $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{1 - \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1}$

- a) Rút gọn.
b) Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0$.

Câu 15. Cho $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- a) Rút gọn P .
b) Tính P biết $x = \frac{4}{\sqrt{2} + 1} + \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{4}{2 + \sqrt{3}}$.
c) Tìm x nguyên để P nguyên.

Câu 16. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{8x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$

- a) Rút gọn P
b) Tính giá trị của P khi $x = 17 - 12\sqrt{2}$
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (\sqrt{x} - 3)P + 4\sqrt{x} - 1$

Câu 17. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 8} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \right)$

- a) Rút gọn A .
b) Tìm giá trị của x để $A > 0$.
c) Tìm x để $A > 1$.

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9

SỰ XÁC ĐỊNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Giáo viên: Nguyễn Thành Long

Tài liệu lớp học trực tiếp 9A0.1 – 18h – 21h – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:Ngày học:

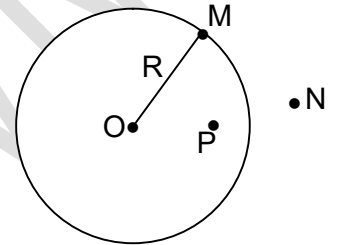
Các con lưu ý chuẩn bị compa để vẽ đường tròn.

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa đường tròn.

* Đường tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R.

* Kí hiệu: $(O ; R)$ hoặc (O) .



2. Điểm thuộc và không thuộc đường tròn.

* Điểm $M \in (O ; R)$ hay M nằm trên đường tròn hay (O) đi qua M $\Leftrightarrow OM = R$.

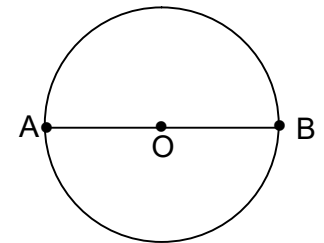
* Điểm N nằm ngoài đường tròn $\Leftrightarrow ON > R$

* Điểm P nằm trong đường tròn $\Leftrightarrow OP < R$

3. Đường kính của đường tròn.

Đoạn thẳng nối hai điểm trên đường tròn và đi qua tâm O gọi là đường kính của đường tròn tâm O.

Tâm O của đường tròn là trung điểm của đường kính.



4. Cách xác định đường tròn.

Một đường tròn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

5. Chú ý.

* Qua ba điểm không thẳng hàng A , B , C ta vẽ được một đường tròn duy nhất có tâm là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC .

* Qua hai điểm A , B cho trước ta vẽ được vô số đường tròn có tâm nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

* Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

6. Tâm đối xứng và trục đối xứng của đường tròn.

* Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

* Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó

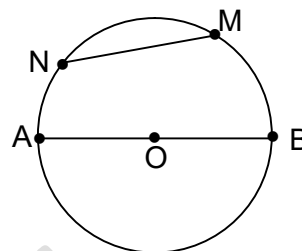
\Rightarrow Một đường tròn chỉ có duy nhất một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

7. Dây của đường tròn.

Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên đường tròn gọi là dây của đường tròn đó.

Ví dụ: Dây MN của (O)

Đường kính AB cũng được gọi là dây của (O).



8. So sánh độ dài đường kính và dây.

Định lý 1: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

9. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

10. Để chứng minh các điểm thuộc một đường tròn: cần nhớ:

- + Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm vòng tròn ngoại tiếp
- + Trong tam giác đều, tâm vòng tròn ngoại tiếp là trọng tâm tam giác đó.
- + Trong tam giác thường:
 - Tâm vòng tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của 3 cạnh tam giác đó
 - Tâm vòng tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác đó
 - Các đỉnh của hình chữ nhật cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.
 - Các đỉnh của hình vuông cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.

B. Bài tập vận dụng:

Câu 1. Chứng minh các đẳng thức trong tam giác:

$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$3(OA^2 + OB^2 + OC^2) = 9OG^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad (G \text{ là trọng tâm}).$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 9R^2$$

Câu 2. Chứng minh BĐT trong tam giác: $\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} \geq 2(a+b+c)$

Câu 3. Chứng minh BĐT trong tam giác: $\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq \frac{3}{2}$

Câu 4. Chứng minh BĐT trong tam giác: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$

Câu 5. Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 20^\circ$; $AB = AC = b$; $BC = a$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 = 3ab^2$$

Câu 6. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA' , BB' , CC' .

Tìm GTNN của $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}$

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm nằm trên AB (điểm M khác O). Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB . Lấy điểm E đối xứng với A qua M . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB . Chứng minh: $MH.MK = \frac{MC^3}{2R}$.

Câu 8. Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ hai bán kính OA, OB . Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh $CM = DN$.

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Câu 9. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

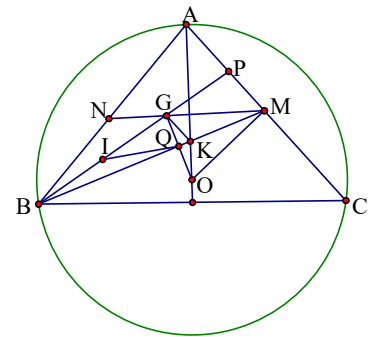
a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30° . Tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

Câu 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ BH vuông góc với AC . Trên AC, CD ta lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$. Chứng minh 4 điểm M, B, C, N nằm trên một đường tròn.

Câu 11. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm đường tròn đó.

Câu 12. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của AC ; G là trọng tâm của tam giác ABM . Gọi Q là giao điểm của BM và GO . Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BGQ .



Câu 13. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$. $BC = 2AD = 2a$, Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC ; M là trung điểm của HC . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM .

Câu 14. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Gọi M, N là trung điểm của CD, DE . AM cắt BN tại I . Chứng minh rằng các điểm M, I, O, N, D nằm trên một đường tròn.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm BC , N là điểm thuộc đường chéo AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. Chứng minh 4 điểm M, N, C, D nằm trên cùng một đường tròn.

Câu 16. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Lấy điểm M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên AC, AB . Chứng minh các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.