BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9

ĐỀ BÀI TẬP VỀ NHÀ NGÀY 01.12

Tài liệu lớp học trực tiếp 9A0.1 – 18h – 21h15 – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên: ....Ngày học: ....

Các con chụp ảnh vở và làm các bài tập sau:

Câu 9. Cho ba số thực *x, y, z* thỏa mãn: $x \ge 1, y \ge 1, z \ge 1$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 30$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

HD:

Ta có:

$3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 30 + 2x^2 + y^2 \ge 30 + 2 + 1 = 33 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 11$.(1)

Lai có $(x-1)(y-1) \ge 0 \Leftrightarrow xy + 1 \ge x + y$.

Chứng minh tương tự: $yz + 1 \ge y + z$; $xz + 1 \ge x + z$.

Cộng theo từng vế, ta có: $2(xy + yz + zx) + 6 \ge 4(x + y + z)$.(2)

Lấyy $(1) + (2)$ ta được:

$(x+y+z)^2 \ge 5 + 4(x+y+z) \Leftrightarrow (x+y+z+1)(x+y+z-5) \ge 0$

$\Leftrightarrow x + y + z \ge 5$ (do $x + y + z + 1 > 0$)

Vậy Min(P) $= 5$ khi và chỉ khi $\begin{cases} z = 3 \\ x = y = 1 \end{cases}$

Câu 10. Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 15abc$.

HD:

Ta có: Do a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác nên:

$$\begin{aligned} a^2 &\ge a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) > 0 \\ b^2 &\ge b^2 - (c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a) > 0 \\ c^2 &\ge c^2 - (a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b) > 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Nhân theo từng vế, ta có:

$$a^2b^2c^2 \ge (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$\Leftrightarrow abc \ge (2-2c)(2-2a)(2-2b)(\text{ do } a+b+c=2)$$
$$\Leftrightarrow 8 - 8(a+b+c) + 8(ab+bc+ca) - 9abc \le 0$$
$$\Leftrightarrow 9abc - 8(ab+bc+ca) \ge -8 \ (1)$$

Lại có:

$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+6abc$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$

$= 8-6(ab+bc+ca)+3abc$

$\Rightarrow 4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc = 32-24(ab+bc+ca)+27abc$

$= 3[9abc-8(ab+bc+ca)]+32 \ (2)$

Từ (1), (2) suy ra:

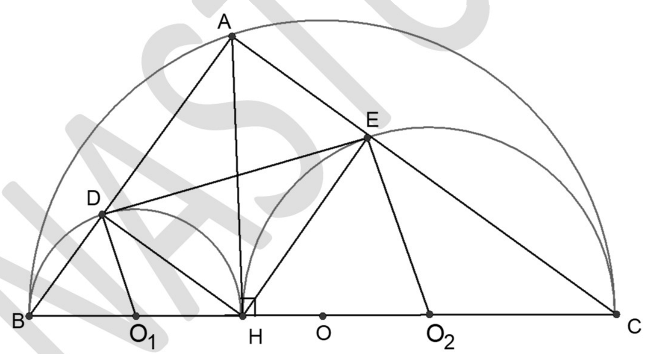
$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc \ge 3\cdot(-8)+32 = 8$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{2}{3}$.

HÌNH HỌC

Câu 9. Cho nửa đường tròn đường kính $BC=2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH\perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm $O_1; O_2$ cắt AB, AC thứ tự tại D và E. Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO_1O_2 đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

HD:



Ta có $\widehat{BAC} = 90^0$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 90^0$

Xét tứ giác $ADHE$ có $\hat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^0 \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật.

Lại có:

$O_1D = O_1B \Rightarrow \Delta O_1BD$ cân tại $O_1 \Rightarrow \hat{B} = \widehat{BDO_1}$ (1).

$\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (2) (Do ADHE là HCN).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ADE}+\widehat{BDO_1} = \hat{B}+\widehat{BAH} = 90^0 \Rightarrow O_1D \perp DE$.

Tương tự $O_2E \perp DE$.

Vậy DEO_2O_1 là hình thang vuông tại D và E .

Ta có $S_{ht} = \frac{1}{2}(O_1D + O_2E).DE = \frac{1}{2}O_1O_2.DE \le \frac{1}{2}O_1O_2^2$

(Vì $O_1D + O_2E = O_1H + O_2H = O_1O_2$ và $DE \le O_1O_2$)

$S_{ht} \le \frac{1}{2}O_1O_2{}^2 = \frac{BC^2}{8} = \frac{R^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $DE = O_1O_2$

$\Leftrightarrow$ DEO_2O_1 là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung BC . Khi đó $\max S_{DEO_2O_1} = \frac{R^2}{2}$

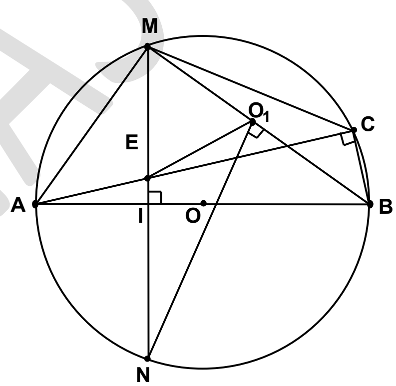
Câu 10. (nếu có thời gian) Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I , gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B . Nối AC cắt MN tại E.

a. Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp .

b. Chứng minh hệ thức: $AM^2 = AE.AC$.

c. Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

HD:



a) Ta có $\widehat{ECB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tứ giác $IECB$ có $\widehat{EIB} + \widehat{ECB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên tứ giác $IECB$ là tứ giác nội tiếp (hai góc đối diện bù nhau)

b) Dễ thấy tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM (g-c)$\Rightarrow$ $AM^2 = AE.AC$.

c) Theo trên $\widehat{AMN}$ = $\widehat{ACM}$ $\Rightarrow$ AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔECM. Nối MB ta có $\widehat{AMB} =$ 90^0, do đó tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp ΔECM phải nằm trên BM.

Ta thấy NO_1 nhỏ nhất khi NO_1 là khoảng cách từ N đến $BM \Rightarrow NO_1 \perp BM$. Gọi O_1 là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM có bán kính là O_1M.

Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn (O_1), bán kính O_1M với đường tròn (O) trong đó O_1 là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

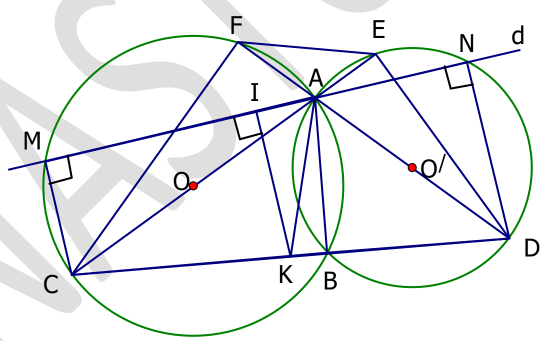
Câu 11. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ AC, AD thứ tự là đường kính của hai đường tròn (O) và (O')

a. Chứng minh ba điểm C, B, D thẳng hàng.

b. Đường thẳng AC cắt đường tròn (O') tại E; đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F (E, F khác A). Chứng minh 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt (O) và (O') thứ tự tại M và N. Xác định vị trí của d để $CM + DN$ đạt giá trị lớn nhất.

HD:



a) Ta có $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ABD}$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) và (O')

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 90^0$

Suy ra C, B, D thẳng hàng.

b) Xét tứ giác $CDEF$ có:

$\widehat{CFD} = \widehat{CFA} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CED} = 90^0$ suy ra $CDEF$ là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta có $\widehat{CMA}=\widehat{DNA}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); suy ra $CM//DN$ hay $CMND$ là hình thang.

Gọi I,K thứ tự là trung điểm của MN và CD. Khi đó IK là đường trung bình của hình thang $CMND$. Suy ra $IK//CM//DN(1)$ và $CM+DN=2.IK(2)$

Từ (1) suy ra $IK\perp MN \Rightarrow IK\le KA$ (3) (KA là hằng số do A và K cố định).

Từ (2) và (3) suy ra: $CM + DN\le 2KA$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $IK=AK \Leftrightarrow d\perp AK$ tại A.

Vậy khi đường thẳng d vuông góc AK tại A thì $(CM+DN)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2KA$.