

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**CÂU ĐIỂM 10 HỌC KÌ 1 - BẤT ĐẲNG THỨC**

Tài liệu lớp học zoom 9 – Nền tảng chuyên – 18h – 21h15 – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Cho hai số  $x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $2xy - 4 = x + y$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = xy + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ .

**Câu 2.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $xy > 2020x + 2021y$ .

Chứng minh rằng:  $x + y > (\sqrt{2020} + \sqrt{2021})^2$ .

**Câu 3.** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn:  $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$  và  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 30$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x + y + z$ .

**Câu 4.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc$ .

**Câu 5.** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = xyz$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ .

**Câu 6.** Cho  $x, y$  là các số dương thỏa mãn:  $xy = 1$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $M = (x + y + 1)(x^2 + y^2) + \frac{4}{x + y}$ .

**Câu 7.** Cho các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $x + y \geq 3$ . Chứng minh rằng  $x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} \geq \frac{9}{2}$

**Câu 8.** Cho  $x > 0, y > 0$  và thỏa mãn  $x + y \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy$ .

**Câu 9.** Cho hai số dương  $x, y$  thỏa mãn  $x + \frac{1}{y} \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{20x}{y} + \frac{2021y}{x}$

**Câu 10.** Tìm các cặp số  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 = (x + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)$  với  $x > \frac{1}{4}, y > \frac{1}{4}$ .

**Câu 11.** Cho  $a, b, c$  là các số không âm thỏa mãn đồng thời:

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{3}$  và  $\sqrt{(a+2b)(a+2c)} + \sqrt{(b+2a)(b+2c)} + \sqrt{(c+2a)(c+2b)} = 3$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $M = (2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 4\sqrt{c})^2$ .

**Câu 12.** Chứng minh  $(1 + 2x) \left( 1 + \frac{y}{2x} \right) \left( 1 + \frac{4}{\sqrt{y}} \right)^2 \geq 81$  với  $x, y > 0$ .

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**ÔN THI HỌC KÌ 1**

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Cho nửa đường tròn tâm O bán kính R, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, tiếp tuyến này cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

- Chứng minh:  $OC \perp AM$  và  $AM \parallel OD$ ;
- Chứng minh:  $AC \cdot BD = R^2$ ;
- Chứng minh: AB là tiếp tuyến đường tròn đường kính CD;
- Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh  $MK \perp AB$ ;
- Tìm vị trí điểm M sao cho diện tích tứ giác ACDB nhỏ nhất.

**Câu 2.** Cho hai đường tròn  $(O;R)$  và  $(O';r)$  tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài DE, với D thuộc  $(O)$  và E thuộc  $(O')$ . kẻ tiếp tuyến chung trong tại A cắt DE tại I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O'I và AE.

- Chứng minh  $\triangle ADE$  vuông;
- Tứ giác AMIN là hình gì? vì sao?
- Chứng minh hệ thức:  $IM \cdot OI = IN \cdot IO'$ ;
- Chứng minh  $OO'$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE;
- Tính độ dài DE biết rằng  $OA = 5\text{cm}, O'A = 3,2\text{cm}$ ;
- Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $OO'$ ;
- Chứng minh  $DE^2 = 4Rr$ .

**Câu 3.** Ở một cái thang dài 3m người ta ghi: "Để đảm bảo an toàn khi dùng thang, phải đặt thang này tạo với mặt đất một góc có độ lớn từ  $60^\circ$  đến  $70^\circ$ ". Đo góc thì khó hơn đo độ dài. Vậy hãy cho biết: Khi dùng thang đó, chân thang phải đặt cách tường khoảng bao nhiêu mét để đảm bảo an toàn?

**Câu 4.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$  và dây cung  $AC = R$ . Gọi K là trung điểm của dây cung BC. Từ điểm B vẽ tiếp tuyến Bx của đường tròn  $(O)$ , tia Bx cắt tia OK tại điểm D.

- Tính  $\sin \angle BAC$ .
- Chứng minh DC là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- Vẽ đoạn thẳng CH vuông góc với đường kính AB tại điểm H, gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CH. Tiếp tuyến tại A của đường tròn  $(O)$  cắt tia BI tại điểm E. Chứng minh ba điểm E, C, D thẳng hàng.

**Câu 5.** Cho nửa đường tròn  $(O;R)$ , đường kính  $AB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến  $Bx$  với  $(O)$ . Điểm  $M$  di động trên tia  $Bx$ ,  $AM$  cắt  $(O)$  tại điểm  $N(N \neq A)$ . Gọi  $E$  là trung điểm của đoạn  $AN$ .

- Chứng minh các điểm  $E, O, B, M$  cùng thuộc một đường tròn.
- Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $N$  cắt tia  $OE$  tại  $K$  và cắt  $MB$  tại  $D$ .

Chứng minh  $KA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$

- Tia  $OD$  cắt  $(O)$  tại  $I$ . Chứng minh  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle DNB$ .

**Câu 6.** Cho đường tròn  $(O;R)$  và một điểm  $A$  sao cho  $OA = 2R$ , vẽ các tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O;R)$ ,  $B$  và  $C$  là các tiếp điểm. Vẽ đường kính  $BOD$ .

- Chứng minh 4 điểm  $A, B, O, C$  cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh  $DC // OA$ .
- Đường trung trực của  $BD$  cắt  $AC$  và  $CD$  lần lượt tại  $S$  và  $E$ . Chứng minh rằng  $OCEA$  là hình thang cân.
- Gọi  $I$  là giao điểm của đoạn  $OA$  và  $(O)$ ,  $K$  là giao điểm của tia  $SI$  và  $AB$ . Tính theo  $R$  diện tích tứ giác  $AKOS$ .

**Câu 7.** Cho điểm  $C$  thuộc đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , ( $AC < BC$ ). Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ .

Tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn  $(O)$  cắt tia  $OH$  tại  $D$ .

- Chứng minh rằng:  $DH \cdot DO = DB^2$ ;
- Chứng minh  $DC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ ;
- Đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AE$ . Chứng minh bốn điểm  $D, B, M, C$  cùng thuộc một đường tròn.

**Câu 8.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và một điểm  $C$  nằm giữa  $A, B$ . Người ta kẻ trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  hai tia  $Ax$  và  $By$  vuông góc với  $AB$  và trên tia  $Ax$  lấy một điểm  $I$ . Tia vuông góc với  $CI$  tại  $C$  cắt tia  $By$  tại  $K$ . Đường tròn đường kính  $IC$  cắt  $IK$  tại  $P$ .

- Chứng minh tứ giác  $CPKB$  nội tiếp được.
- Chứng minh  $ALBK = AC \cdot CB$
- Chứng minh tam giác  $APB$  vuông
- Giả sử  $A, B, I$  cố định. Hãy xác định vị trí của điểm  $C$  sao cho diện tích hình thang vuông  $ABKI$  lớn nhất.