

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9

HÀM SỐ BẬC HAI $y = ax^2$ VÀ ĐỒ THỊ

Tài liệu lớp học zoom 9 – Nền tảng chuyên – 18h – 21h15 – Tối thứ 6 – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:Ngày học:

HÀM SỐ BẬC HAI $y = ax^2$ VÀ ĐỒ THỊ

• Hàm số bậc hai $y = ax^2$ ($a \neq 0$, a gọi là hệ số góc) có đồ thị luôn đi qua điểm $O(0;0)$, nhận Oy làm trục đối xứng.

+) Khi $a > 0$ thì đồ thị hàm số nằm trên trục hoành, có bề lõm quay lên trên và điểm $O(0;0)$ là điểm cực tiểu (thấp nhất).

Hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

+) Khi $a < 0$ thì đồ thị hàm số nằm dưới trục hoành có bề lõm quay xuống dưới và điểm $O(0;0)$ là điểm cực đại (cao nhất).

Hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

• Cách vẽ: Vì đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) luôn qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng nên khi vẽ ta chỉ cần tìm một số điểm bên phải trục Oy và lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy.

VD1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$.

VD2. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^2$, không tính các giá trị hàm số hãy so sánh

$f(-4), f(-2,5)$?

SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL

Xét đường thẳng: $(d): y = bx + c$ và parabol $(P): y = ax^2$ ($a \neq 0$). Số giao điểm của đường thẳng (d) và (P) là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

$$ax^2 = bx + c \Leftrightarrow ax^2 - bx - c = 0. (*)$$

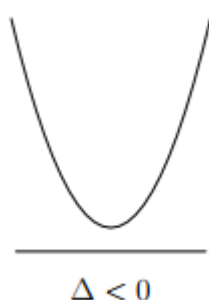
• Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $\Delta > 0$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.



- Phương trình (*) có nghiệm kép: $\Delta = 0$ thì (d) tiếp xúc (P).



- Phương trình (*) vô nghiệm: $\Delta < 0$ thì (d) không cắt (P).



I. CÁC DẠNG BÀI VÀ VÍ DỤ MINH HỌA.

Dạng 1. Xác định số giao điểm của đường thẳng (d): $y = mx + n$ (1) và parabol

(P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (2), tìm tọa độ giao điểm.

Phương pháp:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 = mx + n \Leftrightarrow ax^2 - mx - n = 0$. (*)

- Nếu: $\Delta > 0$ thì (*) có hai nghiệm hay (d) cắt (P) tại hai điểm A, B. Giải phương trình (*) có x_A, x_B , thay vào (1) hoặc (2) có y_A, y_B .
- Nếu: $\Delta = 0$ thì (*) có nghiệm kép hay (d) tiếp xúc (P) tại điểm M. Giải phương trình (*) có x_M , thay vào (1) hoặc (2) có y_M .
- Nếu: $\Delta < 0$ thì (*) vô nghiệm hay (d) không cắt (P).

Câu 1. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = \frac{5}{4}x - 1$.

Tìm số giao điểm của (P) và (d) và tọa độ giao điểm.

Câu 2. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2(m+3)x - m^2 + 3$.

Tìm m để (d) tiếp xúc (P), khi đó tìm tọa độ tiếp điểm.

Dạng 2. Tìm tham số để đường thẳng (d): $y = mx + n$ và parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A; B thỏa mãn biểu thức đối xứng đối với $x_A; x_B$.

Phương pháp: Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 - mx - n = 0$. (*)

• **Bước 1:** (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt hay $\Delta > 0$.

• **Bước 2:** Biến đổi biểu thức đối xứng đối với $x_A; x_B$ để biểu thức đó có chứa $x_A + x_B$ và $x_A \cdot x_B$, sau đó áp dụng định lý Vi-ét và giải ra tham số.

Chú ý:

+ Giải ra tham số phải kết hợp điều kiện trong **Bước 1**.

+ Một số kiến thức áp dụng:

• Hai điểm A, B nằm cùng một phía với trục Oy khi $x_A; x_B$ cùng dấu: $x_A \cdot x_B > 0$.

+ Hai điểm A, B nằm bên trái trục Oy khi $x_A; x_B$ cùng âm: $x_A \cdot x_B > 0; x_A + x_B < 0$.

+ Hai điểm A, B nằm bên phải trục Oy khi $x_A; x_B$ cùng dương: $x_A \cdot x_B > 0; x_A + x_B > 0$.

• Hai điểm A, B nằm khác phía với trục Oy khi $x_A; x_B$ trái dấu: $x_A \cdot x_B < 0$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho

Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng (d): $y = -mx + 3 - m$ (m là tham số).

Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 20$.

Câu 4. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2(m-1)x - 2m + 5$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

Câu 5. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 1$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B thuộc hai phía của Oy.

b) Chứng minh $|x_A - x_B| \geq 2$.

c) Giả sử $x_A < x_B$, tìm m để $|x_A| > |x_B|$.

Câu 6. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - m - 2$. Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $M = |x_1| + |x_2| = 5$.

Dạng 3. Tìm tham số để đường thẳng (d): $y = mx + n$ và parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A; B thỏa mãn biểu thức không đối xứng đối với $x_A; x_B$.

Phương pháp: Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 - mx - n = 0$. (*)

- **Bước 1:** (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt hay $\Delta > 0$.
 - **Bước 2:** Áp dụng định lí Vi-ét và kết hợp điều kiện đề bài ta giải ra các nghiệm hay dựa vào tính chất các nghiệm, từ đó tính được m hay điều kiện của m. **Chú ý:** Đối chiếu điều kiện $\Delta > 0$.
- Câu 7.** Cho parabol (P): $y = x^2$ và (d): $y = 6 - 5mx$. Với giá trị nào của m thì (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 + 2x_2 = 1$?
- Câu 8.** Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2(m - 2)x + m^2$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ với $x_1 < x_2$, thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = 6$.
- Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = (m + 2)x + 3$ và parabol (P): $y = x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có các hoành độ là các số nguyên.
- Câu 10.** Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 10mx - 9m$. Tìm các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - (10m - 1)x_1 + 9m - 9x_2 = 0$.

Dạng 4. Tìm tham số để đường thẳng (d): $y = mx + n$ và parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A; B thỏa mãn biểu thức có chứa y_A, y_B .

Phương pháp: Xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 - mx - n = 0$. (*)

- **Bước 1:** (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm phân biệt hay $\Delta > 0$.
- **Bước 2:** Tính y_A, y_B theo x_A, x_B theo một trong hai cách: Theo phương trình của đường thẳng (d) hoặc theo phương trình của parabol (P).

Sau đó bài toán quy về biểu thức chứa x_A, x_B và cách giải giống **Dạng 2** hay **Dạng 3**.

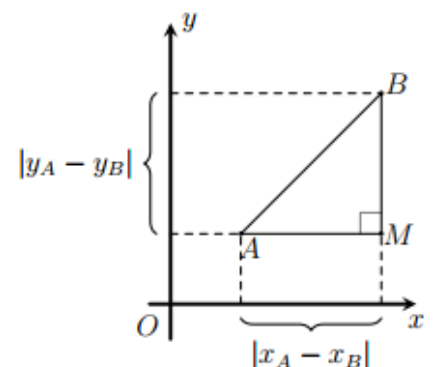
Câu 11. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + m - 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1 + y_2 + x_1x_2 = 5$.

Dạng 5. Bài toán có yếu tố hình học (độ dài đoạn thẳng, diện tích tam giác,...)

- **Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$:**

Từ đồ thị, áp dụng định lý pitago ta có

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$



Câu 12. Đường thẳng (d): $y = -3x + 4$ cắt parabol (P): $y = x^2$ tại A, B.

a) Tìm tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

b) Cho điểm $D(3;0)$, tìm tọa độ điểm $E \in (P)$ sao cho độ dài DE ngắn nhất.

Câu 13. Gọi A, B là giao của parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 3$.

a) Tìm m để AB ngắn nhất.

b) Tính diện tích tam giác OAB theo m.

c) Tìm m để tam giác OAB vuông tại O.

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 14. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$. Tìm các giá trị của m để

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = 3x + m^2 - 1$ và parabol (P): $y = x^2$. Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của (d) và (P).

Tìm m để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$.

Câu 16. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = -x + 6$ và parabol (P): $y = x^2$

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P), tính diện tích tam giác OAB.

Câu 17. Cho đường thẳng (d): $y = 2(m-1)x - m - 5$ và parabol (P): $y = x^2$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có đường chéo là $\sqrt{10}$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = -x^2$.

1) Vẽ parabol (P).

2) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng (d): $y = -x - 2$ và (P). Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = mx + 5$.

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Câu 20. Cho đường thẳng $\Delta: y = (m - 1)x + m^2 - 4$ (m là tham số khác 1).

a) Tìm m để đường thẳng Δ song song với đường thẳng $(d): y = 2x + 5$.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của Δ với trục Ox và Oy . Xác định tọa độ điểm A, B và tìm m để $3OA = OB$.

Câu 21. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -2mx - m^2 + 2$.

Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ giao điểm x_1, x_2 thỏa mãn

$A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 22. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (2m + 5)x - 2m - 1$, m là tham số.

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm ở bên phải trục tung.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành

độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = -mx + 3 - m$.

a) Tìm tọa độ điểm M thuộc parabol (P) biết điểm M có hoành độ bằng 4.

b) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của hai điểm A, B . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 20$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và

parabol $(P): y = x^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1x_2} + 1.$$

Câu 25. Vẽ đồ thị của các hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = x - 4$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Gọi A và B

là các giao điểm của đồ thị hai hàm số trên. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB , với O là gốc tọa độ (đơn vị đo trên các trục tọa độ là centimét).

Câu 26. Cho hàm số $y = (m - 4)x + m + 4$, (m là tham số).

a) Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên \mathbb{R} .

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm, tìm m sao cho $x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) = 18$.

c) Gọi đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng (d). Chứng minh khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) không lớn hơn $\sqrt{65}$.

Câu 27. Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = -2$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất, biết rằng $B(1;1)$.

Câu 28. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m-1)x + m + 4$.

a) Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu 29. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = -x + m$ (x là ẩn, m là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) với đường thẳng (d) khi $m = 4$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ thỏa mãn $x_1x_2 + y_1y_2 = 5$.

Câu 30. Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - 1$ với m là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 1$.

b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$.

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9
ÔN TẬP TỔNG HỢP

Họ và tên:Ngày học:

Bài 1. Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Gọi (d) là tiếp tuyến của (O) tại A , M là điểm chuyển động trên (d) , BM cắt (O) tại C . Tìm tập hợp các điểm N là trung điểm BC .

Bài 2. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . CD là dây cung chuyển động trên nửa đường tròn sao cho $CD = R\sqrt{2}$, AC cắt BD tại M . Tìm tập hợp điểm M .

Bài 3. Cho góc vuông xOy , điểm A cố định nằm trong góc xOy . Một góc vuông quay xung quanh đỉnh A cắt các tia Ox ở B , Oy ở C . Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng BC .

Bài 4. Cho góc vuông xOy cố định, điểm A cố định trên tia Ox , điểm B cố định trên tia Oy . Vẽ tam giác đều ABC (C và O khác phía đối với đường thẳng AB). Tìm tập hợp trung điểm M của BC .

Bài 5. Cho đường tròn $(O ; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC rồi kéo dài một đoạn $CM = CA$. Gọi N là giao điểm của BC và OM . Hỏi khi dây AC quay quanh A thì :

a. Điểm M di động trên đường nào?

b. Điểm N di động trên đường nào?

Bài 6. Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$ cố định, M là điểm chuyển động sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$. M di động trên đường nào?

Câu 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Am là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) , C là điểm chuyển động trên nửa đường tròn (O) , tiếp tuyến với đường tròn (O) qua C cắt Am tại D . Tìm tập hợp các tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC .