

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**LIÊN HỆ PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG**  
Tài liệu lớp học 9.2 CN – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**A. Lí thuyết.**

**\* Khai phương một tích:**

• Với  $A, B$  không âm, ta có :  $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$

Ví dụ :  $\sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9} = 2.3 = 6$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

**Đặc biệt :** Với  $A \geq 0$  ta có  $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

Công thức trên có thể dùng để áp dụng với nhiều số không âm tức

$$\text{Với } A, B, C, D, \dots \geq 0 \text{ thì } \sqrt{A.B.C.D, \dots} = \sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}.\sqrt{D}, \dots$$

**Sai lầm cần tránh :** Nếu không có điều kiện  $A$  và  $B$  không âm thì không được viết đẳng thức trên.

**\* Quy tắc nhân các căn bậc hai:**

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

VD:  $\sqrt{5}.\sqrt{20} = \sqrt{5.20} = \sqrt{100} = 10.$

**B. Bài tập.**

**1. Dạng 1. Áp dụng quy tắc nhân, khai phương tính hợp lí.**

**Câu 1.**

a)  $\sqrt{10}.\sqrt{40}$       b)  $\sqrt{5}.\sqrt{45}$       c)  $\sqrt{52}.\sqrt{13}$       d)  $\sqrt{2}.\sqrt{162}$

**Câu 2.**

a)  $\sqrt{45.80}$       b)  $\sqrt{75.48}$       c)  $\sqrt{90.6,4}$       d)  $\sqrt{2,5.14,4}$

**Câu 3.**

a)  $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$       b)  $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$

**Câu 4.** Biểu diễn  $\sqrt{a.b}$  dưới dạng tích các căn bậc hai với  $a, b < 0$ .

Áp dụng tính  $\sqrt{(-16).(-49)}$

**Câu 5.** Rút gọn các biểu thức:

a)  $\sqrt{9(a-1)^2}$  với  $a \geq 1$ ;

b)  $\sqrt{4(2-a)^2}$  với  $a \geq 2$ ;

c)  $\sqrt{a^2(a+1)^2}$  với  $a > 0$ ;

d)  $\sqrt{b^4(b-1)^2}$  với  $b < 0$ .

**Câu 6.** Rút gọn

a)  $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

b)  $B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

c)  $F = \sqrt{29-4\sqrt{7}} + \sqrt{23+8\sqrt{7}}$

d)  $G = \sqrt{12+2\sqrt{11}} + \sqrt{12-2\sqrt{11}}$

**Câu 7.** Thực hiện phép tính

a)  $\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$

b)  $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$

**Câu 8.** Rút gọn

a)  $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

b)  $C = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

**Câu 9.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = x - 2 - \sqrt{4 - 4x + x^2}, x > 2$

b)  $B = 3 - x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}, x \geq -3$

c)  $C = 2x - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

**2. Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.**

**Câu 10.** Chứng minh

a)  $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$

b)  $\sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

c)  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nêu } x \geq 2 \\ 2 & \text{nêu } x < 2 \end{cases}$

**3. Dạng 3. So sánh.**

**Câu 11.** So sánh

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  và  $\sqrt{10}$

b)  $2 + \sqrt{3}$  và  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

c)  $\sqrt{17 \cdot 19}$  và 18

d)  $\sqrt{15} + \sqrt{7}$  và 8

**Câu 12.** So sánh  $B = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$  và  $B = 3$ .

**Câu 13.** Chứng minh

a) Với  $a, b > 0$  thì  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) Với  $a > b > 0$  thì  $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$

#### 4. Dạng 4: Tìm x

**Câu 14.** Tìm ĐK xác định của các biểu thức rồi đưa các biểu thức về dạng tích

a)  $A = \sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{x - 1}$                       b)  $3\sqrt{x + 3} + \sqrt{x^2 - 9}$

**Câu 15.** Tìm x

a)  $\sqrt{x - 5} = 3$                       b)  $\sqrt{x - 10} = -3$                       c)  $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{5}$

#### 5. Dạng 5. Tìm GTNN

**Câu 16.** Tìm GTNN của biểu thức

a)  $A = \sqrt{2x + 1} + 3$

b)  $B = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + 6$

**Câu 17.** Tìm GTLN của biểu thức

a)  $A = 2 - \sqrt{2x + \frac{1}{2}}$                       b)  $B = \frac{3}{4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

**Câu 18.** Tìm GTNN của biểu thức  $B = \sqrt{1 - 6x + 9x^2} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$

**BTVN.**

**Câu 1.** Rút gọn

a)  $C = \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7}$

b)  $D = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

c)  $E = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + 3 + \sqrt{2}$

d)  $H = (3 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

**Câu 2.** Rút gọn  $C = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$

**Câu 3.** Chứng minh số sau là số nguyên  $\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}}$

**Câu 4.** So sánh  $\sqrt{2021} + \sqrt{2023}$  và  $2\sqrt{2022}$

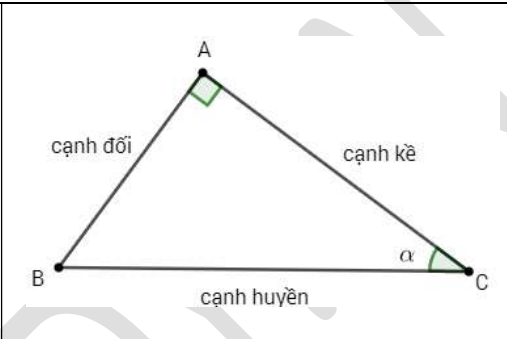
**Câu 5.** Tìm GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{(2020 - x)^2} + \sqrt{(2019 - x)^2}$

Giáo viên: Nguyễn Thành Long

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG**  
**Tài liệu lớp học 9.2 CN – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyễn Hồng**

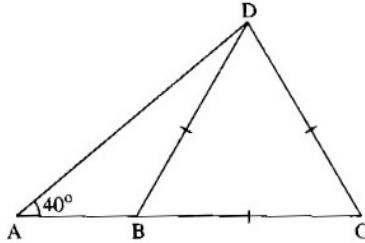
Họ và tên: .....Ngày học: .....

**A. Lí thuyết**

<p><i>Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn <math>\alpha</math></i></p> $\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$ $\tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}} \quad \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$																									
<b>MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC</b>																									
<p><i>Nếu <math>\alpha + \beta = 90^\circ</math> thì:</i></p> $\sin \alpha = \cos \beta$ $\cos \alpha = \sin \beta$ $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ $\cot \alpha = \operatorname{tg} \beta$	<p><i>Với mọi góc nhọn <math>\alpha</math> ta có :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>0 &lt; \sin \alpha &lt; 1, 0 &lt; \cos \alpha &lt; 1</math></li> <li>- <math>\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}</math></li> <li>- <math>\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \operatorname{tg} \alpha \cdot \cot \alpha = 1</math></li> </ul>																								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th colspan="4" style="text-align: left; padding: 2px;"><b>GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT</b></th> </tr> <tr> <th style="width: 15%;"></th> <th style="width: 15%;"><math>30^\circ</math></th> <th style="width: 15%;"><math>45^\circ</math></th> <th style="width: 15%;"><math>60^\circ</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: left;"><b><math>\sin \alpha</math></b></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left;"><b><math>\cos \alpha</math></b></td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left;"><b><math>\tan \alpha</math></b></td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math></td> <td>1</td> <td><math>\sqrt{3}</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: left;"><b><math>\cot \alpha</math></b></td> <td><math>\sqrt{3}</math></td> <td>1</td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math></td> </tr> </tbody> </table>	<b>GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT</b>					$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	<b><math>\sin \alpha</math></b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	<b><math>\cos \alpha</math></b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	<b><math>\tan \alpha</math></b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<b><math>\cot \alpha</math></b>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	<p><i>Một số công thức suy rộng :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1</math></li> <li>- <math>\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \cot^2 \alpha + 1</math></li> </ul>
<b>GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT</b>																									
	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$																						
<b><math>\sin \alpha</math></b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$																						
<b><math>\cos \alpha</math></b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$																						
<b><math>\tan \alpha</math></b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$																						
<b><math>\cot \alpha</math></b>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$																						

**B. Bài tập vận dụng**

**Câu 1.** Cho tam giác BCD là tam giác đều cạnh 5cm và góc DAB bằng  $40^\circ$ . Hãy tính AD và AB.



**Câu 2.** Hình thang cân ABCD ( $AB \parallel DC$ ). Biết  $AB = 15\text{cm}$  và  $DC = 20\text{cm}$ . Góc ở đáy bằng  $75^\circ$ . Tính diện tích hình thang cân ABCD.

**Câu 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng:  $\frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$

**Câu 4.** Tính giá trị của biểu thức

a)  $\sin 28^\circ - \cos 62^\circ + \cot 45^\circ$

b)  $\text{tg} 38^\circ \cdot \text{tg} 52^\circ \cdot \text{tg} 60^\circ$

**Câu 5.** Chứng minh rằng:

a)  $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

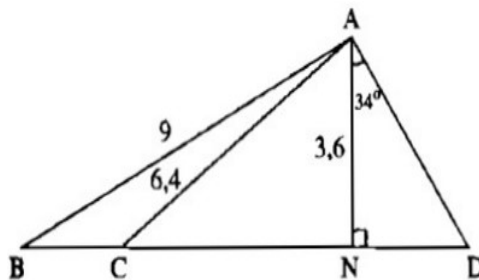
b)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \text{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

**Câu 6.** Gọi AM, BN, CL là ba đường cao của tam giác ABC.

CMR:  $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cos B \cos C$ .

**Câu 7.** Biết  $\cot \alpha = \frac{8}{15}$ . Tính  $\sin \alpha$ ;  $\cos \alpha$

**Câu 8.** Cho hình vẽ. Biết  $AB = 9\text{cm}$ ;  $AC = 6,4\text{cm}$ ;  $AN = 3,6\text{cm}$ ; góc AND bằng  $90^\circ$ ; góc DAN bằng  $34^\circ$ .  
Hãy tính: CN; góc ABN; góc CAN và AD?



**Câu 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ trung điểm E của cạnh AC kẻ EF vuông góc với BC tại F. Biết  $BC = 10$ ;  $\sin C = 0,6$ . Tính diện tích tứ giác ABFE.

**Câu 10.** Cho tam giác nhọn ABC có  $\widehat{A} = 30^0$ . Hai đường cao BH và CK. Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta AHK} = 3S_{\Delta BCHK}.$$

**Câu 11.** Cho tam giác ABC ( $\widehat{B} = 90^0$ ). Lấy điểm M trên cạnh AC. Kẻ AH vuông góc với tia BM và CK vuông góc với tia BM.

a) Chứng minh:  $CK = BH \cdot \tan \widehat{BAC}$

b) Chứng minh:  $\frac{MC}{MA} = \frac{BH \cdot \tan^2 \widehat{BAC}}{BK}$

**Câu 12.** Cho  $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**Câu 13.** Cho tam giác ABC có góc A bằng  $90^0$ , đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Biết  $BH = 4\text{cm}$ ,  $HC = 9\text{cm}$ .

a) Tính độ dài DE.

b) Chứng minh  $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

c) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E lần lượt cắt BC tại M và N. Chứng minh M là trung điểm của BH và N là trung điểm của CH.

d) Tính diện tích tứ giác DENM.

**Câu 14.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính  $\sin B$  và  $\sin C$  trong các trường hợp:

a)  $AB = 13; BH = 5$

b)  $BH = 3; CH = 4$

**Câu 15.** Cho tam giác ABC có  $BC = 12\text{cm}$ , góc B bằng  $60^0$ ; góc C bằng  $40^0$ . Tính:

a) Đường cao CH và cạnh AC.

b) Diện tích tam giác ABC.

**Câu 16.** Hình bình hành ABCD có  $AB = 20\text{cm}$  và  $BD = 15\text{cm}$ , góc tạo bởi hai cạnh AB và BD là  $120^0$ . Tính diện tích hình bình hành ABCD.

**Câu 17.**

a) Tính giá trị của biểu thức:  $\text{tg}10^0 \cdot \text{tg}11^0 \dots \text{tg}79^0 \cdot \text{tg}80^0$

b) Cho  $\tan x + \cot x = 2$ . Tính  $\tan^2 x + \cot^2 x; \tan^3 x + \cot^3 x$

**Câu 18.** Cho tam giác vuông ở A có  $AB < AC$  và trung tuyến AM,  $\widehat{ACB} = \alpha$ ,  $\widehat{AMB} = \beta$ . Chứng minh rằng  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta$  (gợi ý: Kẻ đường cao AH).

**Giáo viên: Trần Tuấn Việt**