Toán lớp 9: Nền tảng chuyên

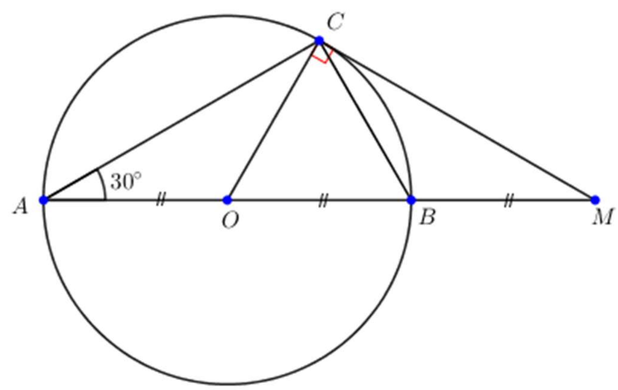
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyên Hồng

HÌNH HỌC

Câu 10. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$. Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho BM = R. Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

HD:



Ta có: Xét $\triangle ABC$ có AB là đường kính nên $\triangle ABC$ vuông tại C

Ta lại có: $\widehat{CAB} = 30°$ nên $CB = \frac{1}{2}AB = R$.

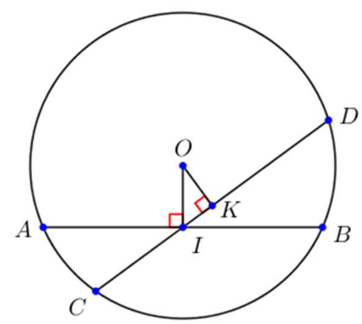
Xét $\triangle COM$ có CB là trung tuyến và $CB = \frac{1}{2}OM$

Suy ra: $\triangle COM$ vuông tại C hay $CM \perp OM$

Vậy MC là tiếp tuyến của đường tròn tâm O.

Câu 11. Cho đường tròn (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I.

HD:



Gọi CD là dây bất kì đi qua I và không vuông góc với OI.

Kẻ $OK \perp CD$.

Tam giác OKI vuông tại K nên $OI > OK$

Suy ra $AB < CD$ (dây lớn hơn thì gần tâm hơn)

Vậy dây AB vuông góc với IO tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I.

ĐẠI SỐ

Câu 13. Giải phương trình $\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x^2-16} = 1$.

HD

Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x \le -4 \end{array}\right.$.

$$\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x^2-16} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} = \sqrt{x^2-16} + 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 = x^2 - 16 + 2\sqrt{x^2-16} + 1$$

$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2-16} \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$ hoặc $x = -5$.

Câu 14. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{4-x}$.

HD

Điều kiện xác định $x \le 4$.

Ta có: $\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{4 - x}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 + x^2 + x + 1 + 2\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = 4 - x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 + 2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2} - 4 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = -2x^2 - x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - x + 2 \ge 0 \\ 4(x^4 + x^2 + 1) = (-2x^2 - x + 2)^2 \end{cases}$$

Với $-2x^2 - x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x \le \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{4} \end{array}\right.$ (*)

Với $4(x^4 + x^2 + 1) = (-2x^2 - x + 2)^2$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^4 + x^2 + 4 + 4x^3 - 8x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 11x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x^2 - 11x - 4) = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 11x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{185}}{8} \end{array}\right.$. Do $x = \dfrac{11 + \sqrt{185}}{8}$ không thỏa mãn (*) nên loại.

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $\left\{0; \dfrac{11 - \sqrt{185}}{8}\right\}$.

Câu 15. Giải phương trình $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3x + 5}$.

HD

Điều kiện xác định $\begin{cases} 2x + 1 \ge 0 \\ 3 - x \ge 0 \\ 3x + 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \le x \le 3$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3 - x}\right)^2 = \left(\sqrt{3x + 5}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + 3 - x + 2\sqrt{(2x + 1)(3 - x)} = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow x + 4 + 2\sqrt{(2x + 1)(3 - x)} = 3x + 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x + 1)(3 - x)} = 2x + 1 \qquad (1)$$

Trường hợp 1: Với $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn phương trình)

Trường hợp 2: Với $2x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{1}{2}$, chia cả hai vế của (1) cho $\sqrt{2x+1}$ ta có:

$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3-x}=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 4(3-x)=2x+1 \Leftrightarrow 6x=11 \Leftrightarrow x=\frac{11}{6}$ (thỏa mãn)

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{-1}{2};\frac{11}{6}\right\}$.

Câu 16. Giải phương trình $x^4+2x^2+x\sqrt{2x^2+4}=4$.

HD

Điều kiện xác định $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^2(x^2+2)+x\sqrt{2(x^2+2)}-4=0$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+2)+\sqrt{2}x\sqrt{x^2+2}-4=0$$

Đặt $x\sqrt{x^2+2}=a$, khi đó ta có phương trình $a^2+a\sqrt{2}-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{2} \\ a=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Với $a=\sqrt{2}$ ta có: $x\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}$ (điều kiện $x>0$), khi đó $x^2(x^2+2)=2 \Leftrightarrow x^4+2x^2-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1-\sqrt{3} \\ x^2=-1+\sqrt{3} \end{array}\right.$. Ta loại $x^2=-1-\sqrt{3}$, với $x^2=-1+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}$.

Do $x>0$ nên $x=\sqrt{-1+\sqrt{3}}$.

Với $a=-2\sqrt{2}$ ta có: $x\sqrt{x^2+2}=-2\sqrt{2}$ (điều kiện $x<0$), khi đó: $x^2(x^2+2)=8 \Leftrightarrow x^4+2x^2-8=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ x^2=-4 \end{array}\right.$. Ta loại $x^2=-4$, với $x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Do $x<0$ nên $x=-\sqrt{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\sqrt{-1+\sqrt{3}};-\sqrt{2}\right\}$.