

Toán lớp 9: Nền tảng chuyên
ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC
Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: Ngày học:

Câu 1. Chứng minh các đẳng thức trong tam giác:

$$[1] S = \frac{1}{2}ah_a = pr = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$[2] a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$[3] a = 2R \sin A$$

$$[4] m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$[5] l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

$$[6] 3(OA^2 + OB^2 + OC^2) = 9OG^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$[7] a^2 + b^2 + c^2 \geq 9R^2$$

Câu 2. Chứng minh các BĐT trong tam giác:

$$[1] a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

$$[2] 2(a^2 + b^2 + c^2) < (a+b+c)^2$$

$$[3] ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) > 3abc$$

$$[4] \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$[5] \frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} \geq 2(a+b+c)$$

$$[6] \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq \frac{3}{2}$$

$$[7] \frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{b+c-a} + \frac{ca}{c+a-b} \geq 2(a+b+c)$$

$$[8] (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc$$

$$[9] \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$$

$$[10] a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2} \quad (a+b+c=1)$$

$$[11] \sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC'.

Tim GTNN của $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$

Giáo viên: Bùi Minh Mẫn

Toán lớp 9: Nền tảng chuyên

CĂN BẬC BA

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: Ngày học:

Câu 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2} + \frac{\sqrt{b}}{b+2} + \frac{\sqrt{c}}{c+2} = \frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$$

Câu 2.

a) Cho $(x + \sqrt{2022 + x^2})(y + \sqrt{2022 + y^2}) = 2022$.

Tính giá trị của biểu thức : $T = x^{2022} + y^{2022}$.

b) Tính tổng : $S = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{8 + \sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{240 + \sqrt{14399}}{\sqrt{119} + \sqrt{121}}$.

Mỗi số hạng trên có dạng $\frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $1 \leq n \leq 60$.

Câu 3. Tính $S = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2024}\right)^2}$

CĂN BẬC BA

$$+ (\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a \quad + a \leq b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b} \quad + \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b}; \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} (b \neq 0).$$

Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba, dạng $A = \sqrt[3]{a + b\sqrt{c}} \pm \sqrt[3]{a - b\sqrt{c}}$.

Kiến thức liên quan:

- $\sqrt[3]{A^3} = A$.
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b)$.
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a^3 - b^3) - 3ab(a - b)$.

Phương pháp 1: Vận dụng hằng đẳng thức bậc 3 để đưa $a + b\sqrt{c}$ và $a - b\sqrt{c}$ về lũy thừa bậc 3.

Khi đó $A = \sqrt[3]{(m + n\sqrt{c})^3} \pm \sqrt[3]{(m - n\sqrt{c})^3} = (m + n\sqrt{c}) \pm (m - n\sqrt{c})$.

Câu 1. Rút gọn $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

Phương pháp 2: Mũ ba hai vế và đưa về giải phương trình bậc ba.

Vẫn với ví dụ trên, rút gọn: $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

Câu 2. Chứng minh $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$.

Câu 3. Chứng minh tổng: $\sqrt[3]{18-5\sqrt{13}} + \sqrt[3]{18+5\sqrt{13}}$ là một số nguyên tố.

Câu 4. Chứng minh $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ là nghiệm của phương trình có hệ số nguyên.

Câu 5. Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ và $m = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}$ $n = \sqrt{\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right) - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}$.

Chứng minh rằng $m - n = 3$.

Câu 6. Chứng minh rằng, nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$

Câu 7. Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}}}$.

a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a là nghiệm.

b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

Câu 8. Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$.

a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm.

b) Đa thức $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$. Tính $f(a)$.

Câu 9. Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

Đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1987)^{2022}$. Hãy tính $f(a)$.

Câu 10. Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Giáo viên: Trần Ngọc Hà