

Toán lớp 9: Nền tảng chuyên
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

HÌNH HỌC

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC'.

Tìm GTNN của $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}$

HD:

Vẽ $Cx \perp CC'$; D đối xứng với A qua Cx và AD cắt Cx tại I $\Rightarrow I$ là trung điểm AD

$\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C $\Rightarrow CA = CD$

Tứ giác AICC' có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow CC' = AI = ID; \widehat{BAD} = 90^\circ$

Ta có: $BD \leq BC + CD$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABD$ vuông tại A $\Rightarrow AC = BC$

$\Rightarrow BD^2 \leq (BC + CD)^2$

$\triangle ABD$ vuông tại A $\Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2$

$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + AC)^2$

$\Rightarrow AD^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2 \Rightarrow 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$

Dấu "=" xảy ra $AC = BC$

Tương tự ta có $4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$.

Dấu "=" xảy ra $AB = BC$

Và $4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$

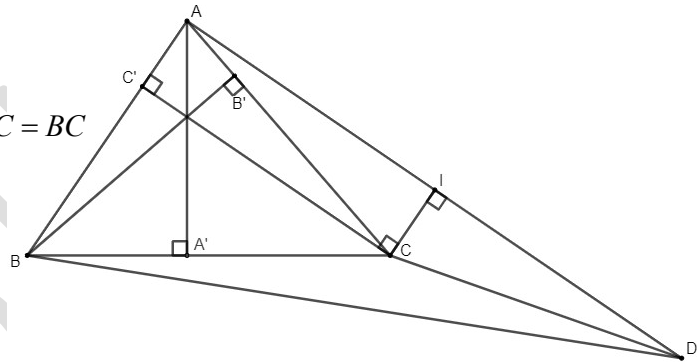
Dấu "=" xảy ra $AB = AC$

Suy ra $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$

$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC = AC \Rightarrow \triangle ABC$ đều

Vậy GTNN của $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} = 4$ khi $\triangle ABC$ đều



ĐẠI SỐ

Câu 8. Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$.

a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm.

b) Đa thức $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$. Tính $f(a)$.

HD:

a) Ta có: $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}} - \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3} = 2-\sqrt{3} - 2-\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow a^2 - 12 = 0$$

Vậy đa thức $x^2 - 12$ là đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm.

b) Ta có: $f(a) = \frac{a^6 + a^4 + 4a^2}{40(a^4 + 4a^2 - 144)} = \frac{(a^2)^3 + (a^2)^2 + 4a^2}{40[(a^2)^2 + 4a^2 - 144]} = \frac{12^3 + 12^2 + 4.12}{40(12^2 + 4.12 - 12^2)} = 1$ (vì $f(a) = 12$)

Hay $f(a) = 1$

Câu 9. Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1987)^{2022}$. Hãy tính $f(a)$.

HD:

Ta có: $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} \Leftrightarrow a^3 = 38+17\sqrt{5} + 38-17\sqrt{5} + 3a\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow a^3 = 76 - 3a \Leftrightarrow a^3 + 3a = 76$$

Khi đó: $f(a) = (a^3 + 3a + 1987)^{2022} = (76 + 1987)^{2022} = 2063^{2022}$

Câu 10. Biểu diễn $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

HD:

Ta có: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5} \Leftrightarrow 2 + \sqrt{5} = a^3 + b^3 + \sqrt{5}(3a^2b + 15ab^2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 15ab^2 = 2 \\ 3a^2b + 5b^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a^3 + 15ab^2 - 2(3a^2b + 5b^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 15ab^2 - 6a^2b - 10b^3 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2 - 5ab + 10b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a-b=0 \text{ (vì } a^2 - 5ab + 10b^2 \neq 0 \forall a, b \in \mathbb{Q})$$

$$\Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$