

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG**  
**Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng**

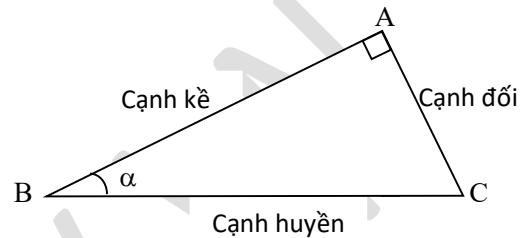
Họ và tên: .....Ngày học: .....

**1/ Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.**

Có bốn tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông:

$$\sin \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{huyền}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{huyền}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{ke}} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{đoi}}$$



**2/ Hệ thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác góc nhọn.**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

**GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT**

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
<b><math>\sin \alpha</math></b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<b><math>\cos \alpha</math></b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<b><math>\tan \alpha</math></b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
<b><math>\cot \alpha</math></b>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

**3/ Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.**

Gọi  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc phụ nhau trong tam giác vuông.

Ta có:  $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta \quad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

$$1^\circ = 60' \quad 90^\circ = 89^\circ 60'$$

**Bài tập vận dụng:**

**Câu 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Chứng minh rằng:

a)  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$

b)  $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \leq \frac{1}{AD^2}$

**Câu 2.** Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết  $AD = 5a$ ,  $AC = 12a$ .

a) Tính  $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$

b) Tính chiều cao của hình thang ABCD.

**Câu 3.** Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết  $HD : HA = 1 : 2$ , chứng minh rằng  $\tan B \cdot \tan C = 3$ .

**Vinastudy – Chuyên bồi dưỡng Toán từ lớp 4 đến lớp 12**  
**Hệ thống khóa học video, lớp học tương tác qua zoom, học kèm trực tiếp**  
**Đc: Số 23 Ngõ 26 Nguyễn Hồng - Đống Đa - Hà Nội**

---

**Câu 4.** Cho góc  $xOy$  có số đo bằng  $\alpha (\alpha < 90^\circ)$ . Trên tia phân giác của góc này lấy điểm  $A$  cố định. Qua  $A$  vẽ một đường thẳng thay đổi cắt  $Ox, Oy$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng tổng  $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$  có giá trị không đổi.

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$ , hai đường trung tuyến  $BE, CF$  vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:  
$$\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}.$$

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A, AH \perp BC, HE \perp AB, HF \perp AC$   
( $H \in BC, E \in AB, F \in AC$ ).

a. Chứng minh rằng  $AE \cdot AB = AF \cdot AC; BH = BC \cdot \cos^2 B$ .

b. Chứng minh rằng  $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BE}{CF}$ .

c. Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{CF^2} + \sqrt[3]{BE^2}$ .

d. Cho  $BC = 2a$ . Điểm  $A$  thay đổi sao cho giả thiết vẫn đúng. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác  $AEHF$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  có 3 góc nhọn và có độ dài lần lượt là  $a, b, c$ . CMR:

$$\sqrt{a \cdot \sin A} + \sqrt{b \cdot \sin B} + \sqrt{c \cdot \sin C} = \sqrt{(a + b + c) \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)}$$

**Câu 8.** Lấy điểm  $O$  bất kỳ trong tam giác, các tia  $AO, BO, CO$  cắt các cạnh  $BC, CA, AB$  theo thứ tự tại  $D, E, F$ . Chứng minh rằng:

a)  $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$

b)  $\left(1 + \frac{AD}{OD}\right) \cdot \left(1 + \frac{BE}{OE}\right) \cdot \left(1 + \frac{CF}{OF}\right) \geq 64$ .

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$ , có các góc  $B$  và  $C$  đều nhọn. Các đường cao  $AD$  và  $BE$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Cho biết  $\tan B \cdot \tan C = 3$ , chứng minh rằng  $HG \parallel BC$ .

**Câu 10.** Nếu tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có trung tuyến  $AM, \widehat{ABM} = 15^\circ$  và  $S_{ABC} = 16$ . Tính độ dài  $BM$ .

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $B = 60^\circ$ . CMR:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$ .

**Giáo viên: Thầy Mẫn**

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9**  
**PHÉP KHAI PHƯƠNG (tiếp)**

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên: .....Ngày học: .....

**Câu 1.** Chứng minh  $B = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$  không là số nguyên.

**Câu 2.** Chứng minh

a) Với  $a, b > 0$  thì  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) Với  $a > b > 0$  thì  $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$

**Tìm GTNN**

**Câu 3.** Tìm GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{(2020-x)^2} + \sqrt{(2019-x)^2}$

**Câu 4.** Tìm GTNN của biểu thức  $B = \sqrt{1-6x+9x^2} + \sqrt{9x^2-12x+4}$

**Câu 5.** Tìm GTNN của  $4a + \frac{1}{a-4}$ , với  $a > 4$

**Câu 6.**

a) Tìm GTNN của  $\sqrt{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x-1}+1}$ , với  $x \geq 1$ .

b) Tìm GTNN của  $2\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-2}$ , với  $x > 3$ .

**Câu 7.**

a) Cho  $a, b \geq 0$ , chứng minh  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

b) Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$ .

**Chứng minh, giải pt**

**Câu 8.** Cho  $a, b, c$  là các số hữu tỉ thỏa mãn  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh

$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}$  là một số hữu tỉ.

**Câu 9.** Cho  $a, b, c$  là các số hữu tỉ khác 0;  $a = b + c$ . CM:  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$  là số hữu tỉ.

**Câu 10.** Cho  $a, b, c$  là các số hữu tỉ khác nhau đôi một. CM:

$$A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}}$$
 là một số hữu tỉ.

**Câu 11.** Giải phương trình

a)  $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{5 - x}$

b)  $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0.$

**Câu 12.** Giải phương trình

a)  $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$

b)  $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 1 + \sqrt{3}$

c)  $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{-9x^2 + 6x + 8}$

**Câu 13.** Giải pt

a)  $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} + 6\sqrt{x - 1} = 5$

b)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$

**Câu 14.** Chứng minh  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ;  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Áp dụng:

a) Cho  $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ . CM:  $18 < A < 19$ .

b) CM:  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$ .

**Giáo viên: Trần Ngọc Hà**