

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG
Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

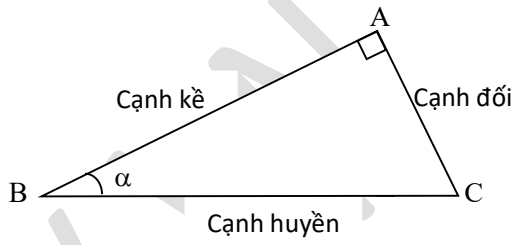
Họ và tên:Ngày học:

1/ Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

Có bốn tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông:

$$\sin \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{huyền}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{huyền}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{đoi}}{\text{ke}} \quad \text{cotg} \alpha = \frac{\text{ke}}{\text{đoi}}$$



2/ Hệ thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác góc nhọn.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{tg} \alpha \cdot \text{cotg} \alpha = 1 \quad \text{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \text{tg}^2 \alpha \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT

	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3/ Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

Gọi α và β là hai góc phụ nhau trong tam giác vuông.

Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta & \cos \alpha &= \sin \beta \\ \text{tg} \alpha &= \text{cotg} \beta & \text{cotg} \alpha &= \text{tg} \beta \\ 1^\circ &= 60' & 90^\circ &= 89^\circ 60' \end{aligned}$$

Bài tập vận dụng:

DẠNG 1: Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

Câu 1. Đổi tỉ số lượng giác của các góc nhọn sau đây thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° .

$\sin 82^\circ$; $\cos 47^\circ$; $\sin 48^\circ$; $\cos 55^\circ$; $\sin 47^\circ 20'$; $\text{tg} 62^\circ$; $\text{cotg} 82^\circ 45'$

Câu 2. Đơn giản biểu thức: $A = \sin(90^\circ - x)\sin(180^\circ - x)$; $B = \cos(90^\circ - x)\cos(180^\circ - x)$

Câu 3. Tính kết quả của biểu thức

- a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 60^\circ$.
- b) $B = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$

DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức. Rút gọn biểu thức theo góc α .

Câu 4. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

b) $\sin x \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$.

Câu 5. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{1 + \tan \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \alpha} = 1$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \sin^2 x - 1$

c) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

Câu 6. Rút gọn biểu thức: $\sin^6 x + 3 \sin^4 x \cdot \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^4 x + \cos^6 x$

Câu 7. Cho tam giác ABC nhọn có ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \quad (AB = c, BC = a, CA = b).$$

Câu 8. Biết rằng $\tan \alpha = 0,8$. Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

Dạng 3: Tính khoảng cách - Tính chiều cao - Tính diện tích tam giác - Tính độ dài đoạn thẳng - C/m các hệ thức trong tam giác: Bằng cách áp dụng tỉ số LG góc nhọn.

Câu 9. Cho tam giác ABC có $AB = 26\text{cm}$, $AC = 25\text{cm}$, đường cao $AH = 24\text{cm}$. Tính cạnh BC.

Câu 10. a) Cho tam giác ABC có A nhọn. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

b) Cho tứ giác ABCD có AC cắt BD tại O và AOB nhọn. CMR: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$ b) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \leq \frac{1}{AD^2}$.

Câu 12. Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết $AD = 5a$, $AC = 12a$.

a) Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$

b) Tính chiều cao của hình thang ABCD.

BTVN:

Câu 13. Tính:

a) $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$.

b) $B = \cos 45^\circ \cdot \cos^2 23^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos^2 67^\circ$.

c) $C = \frac{\tan 64^\circ}{\cot 26^\circ} - 1$

Câu 14. Tính: $\cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$

Câu 15. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{1+\sin^2 \alpha}{1-\sin^2 \alpha} = 1+2\operatorname{tg}^2 \alpha$

b) Cho α, β là hai góc nhọn. Chứng minh rằng: $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \beta}$

Câu 16. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H. Biết HD:HA = 1:2, chứng minh rằng $\tan B \cdot \tan C = 3$.

Câu 17. Cho góc xOy có số đo bằng $\alpha (\alpha < 90^\circ)$. Trên tia phân giác của góc này lấy điểm A cố định. Qua A vẽ một đường thẳng thay đổi cắt Ox, Oy lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ có giá trị không đổi.

Câu 18. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BE, CF vuông góc với nhau. Chứng minh rằng: $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.

Giáo viên: Thầy Mẫn

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9
CẤP BẬC HAI (tiếp)

Tài liệu lớp học Zoom 9A0 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:Ngày học:

4. Dạng 4. Rút gọn biểu thức

Câu 4. Rút gọn.

a) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$

b) $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$

c) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$;

d) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

Câu 5. Rút gọn biểu thức

a) $A = (\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})^2$

b) $B = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

c) $D = \sqrt{21-12\sqrt{3}}$

d) $E = \sqrt{7+3\sqrt{5}} + \sqrt{7-3\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{21-6\sqrt{6}} + \sqrt{9+2\sqrt{18}} - 2\sqrt{6+3\sqrt{3}}$

f) $\sqrt{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{13+\sqrt{48}}}$

g) $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}} = 3$

Câu 6. Chứng minh $\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}} = 2$

Câu 7. Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$

b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-3}} - 2 - \sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}$

5. Dạng 5. Giải phương trình

Câu 8. Giải phương trình

a) $5\sqrt{2x+1} = 21$

b) $\sqrt{(x-5)^2} = 2$

Câu 9. Giải phương trình

a) $\sqrt{x+4} = x+2$

b) $\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+1} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = 0$

BTVN

Câu 1. Rút gọn

a) $\sqrt{(2+\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$

b) $\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Câu 2. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$.

b) $B = \sqrt{4x - 2\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x + 2\sqrt{4x - 1}}$ khi $x \geq \frac{1}{4}$.

Câu 3. Tìm đk xác định của

a) $A = \sqrt{x^2 + x + 1}$ b) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1}$ c) $B = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d) $\sqrt{3x^2 - x - 4}$

LIÊN HỆ PHÉP NHÂN VÀ KHAI PHƯƠNG

*** Khai phương một tích:**

• Với A, B không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

Ví dụ: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Đặc biệt: Với $A \geq 0$ ta có $(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A^2} = A$

Công thức trên có thể dùng để áp dụng với nhiều số không âm tức

$$\text{Với } A, B, C, D, \dots \geq 0 \text{ thì } \sqrt{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \dots} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} \cdot \sqrt{D} \cdot \dots$$

Sai lầm cần tránh: Nếu không có điều kiện A và B không âm thì không được viết đẳng thức trên.

*** Quy tắc nhân các căn bậc hai:**

Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

VD: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$.

B. Bài tập.

Câu 1. Rút gọn

a) $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ b) $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

c) $C = \sqrt{23 + 8\sqrt{7}} - \sqrt{7}$ d) $D = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$

e) $E = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + 3 + \sqrt{2}$ f) $F = \sqrt{29 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{23 + 8\sqrt{7}}$

g) $G = \sqrt{12 + 2\sqrt{11}} + \sqrt{12 - 2\sqrt{11}}$ h) $H = (3 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

Câu 2. Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Câu 3. Rút gọn

a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ b) $C = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

2. Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.

Câu 4. Chứng minh

a) $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$ b) $\sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

c) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} & \text{nêu } x \geq 2 \\ 2 & \text{nêu } x < 2 \end{cases}$

Câu 5. Chứng minh số sau là số nguyên $\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}}$

3. Dạng 3. So sánh.

Câu 6. So sánh $\sqrt{2021} + \sqrt{2023}$ và $2\sqrt{2022}$

Câu 7. Chứng minh $B = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}$ không là số nguyên.

Câu 8. Chứng minh

a) Với $a, b > 0$ thì $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) Với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$

4. Dạng 4. Tìm GTNN

Câu 9. Tìm GTNN của biểu thức $A = \sqrt{(2020-x)^2} + \sqrt{(2019-x)^2}$

Câu 10. Tìm GTNN của biểu thức $B = \sqrt{1-6x+9x^2} + \sqrt{9x^2-12x+4}$

Giáo viên: Trần Ngọc Hà