Toán lớp 9: Nền tảng chuyên
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9A0 – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:... **Ngày học:**....................................

HÌNH HỌC

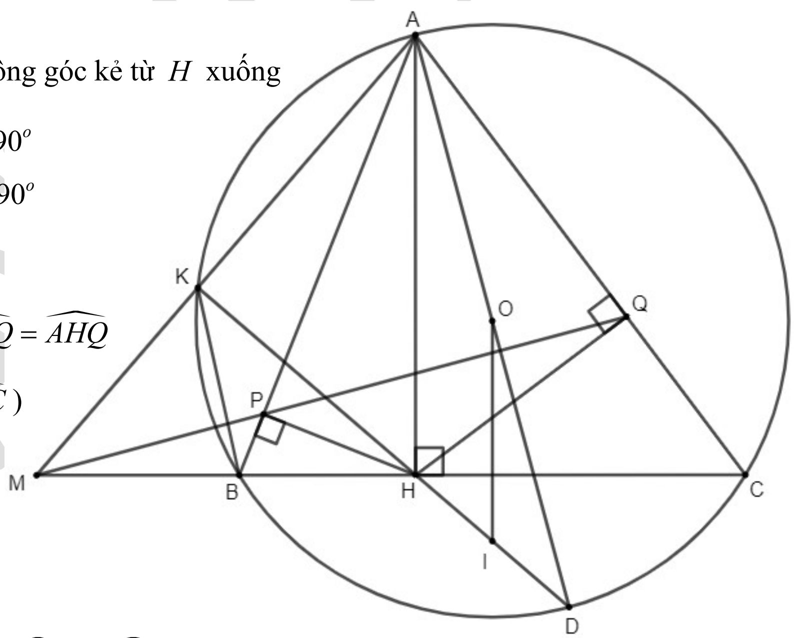
Câu 6. Cho tam giác $ABC\left(AB<AC\right)$ nội tiếp $\left(O\right)$. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P,Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB,AC.

a) Chứng minh $BCQP$ là tứ giác nội tiếp

b) Hai đường thẳng BC,QP cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MH^2=MB.MC$

c) Đường thẳng MA cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại K. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQP$. Chứng minh I,H,K thẳng hàng

HD:



a) Vì P,Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H xuống AB,AC nên $\begin{cases} HP\perp AB \\ HQ\perp AC \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \widehat{HPA}=90^o \\ \widehat{HQA}=90^o \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{HPA}+\widehat{HQA}=180^o$

$\Rightarrow APHQ$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{APQ}=\widehat{AHQ}$

Mà $\widehat{AHQ}=\widehat{QCB}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$)

$\Rightarrow \widehat{APQ}=\widehat{QCB}$

$\Rightarrow \widehat{BPQ}+\widehat{QCB}=\widehat{BPQ}+\widehat{APQ}=180^o$

Suy ra tứ giác $BPQC$ nội tiếp

b) Ta có $BPQC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPB}=\widehat{MCQ}$

Xét ΔMPB và ΔMCQ có:

$\widehat{QMC}$: góc chung

$\widehat{MPB}=\widehat{MCQ}$

$\Rightarrow \Delta MPB \backsim \Delta MCQ\left(g-g\right)$

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MC}=\dfrac{MB}{MQ}\Rightarrow MP.MQ=MB.MC$

Vì $\widehat{MHP}=\widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) và $\widehat{BAH}=\widehat{MQH}$ (vì $APHQ$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MHP}=\widehat{MQH}$

Xét ΔMPH và ΔMHQ có:

$\widehat{QMC}$: góc chung

$\widehat{MHP}=\widehat{MQH}$

$\Rightarrow \Delta MPH \backsim \Delta MHQ \Rightarrow \dfrac{MP}{MH}=\dfrac{MH}{MQ} \Rightarrow MH^2=MP.MQ \Rightarrow MH^2=MB.MC$ (đpcm)

c) Kẻ đường kính AD của đường tròn tâm (O),

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQP \Rightarrow IB=IC$

$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của BC

Mặt khác $OB=OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow OI \,//\, AH$ (vì $AH \perp BC$)

ΔAHD có $OI \,//\, AH; O$ là trung điểm AD

$\Rightarrow I$ là trung điểm HD

Tứ giác $AKBC$ nội tiếp $(O) \Rightarrow \widehat{MKB}=\widehat{MCA}$ (cùng bù với $\widehat{AKB}$)

Xét ΔMKB và ΔMCA có:

$\widehat{AMC}$: góc chung

$\widehat{MKB}=\widehat{MCA}$

$\Rightarrow \Delta MKB \backsim \Delta MCA(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{MK}{MC}=\dfrac{MB}{MA} \Rightarrow MK.MA=MB.MC$

Mà $MB.MC=MH^2(cmt) \Rightarrow MA.MK=MH^2 \Rightarrow \dfrac{MH}{MK}=\dfrac{MA}{MH}$

Xét ΔMKH và ΔMHA có:

$\dfrac{MA}{MH}=\dfrac{MH}{MK}$

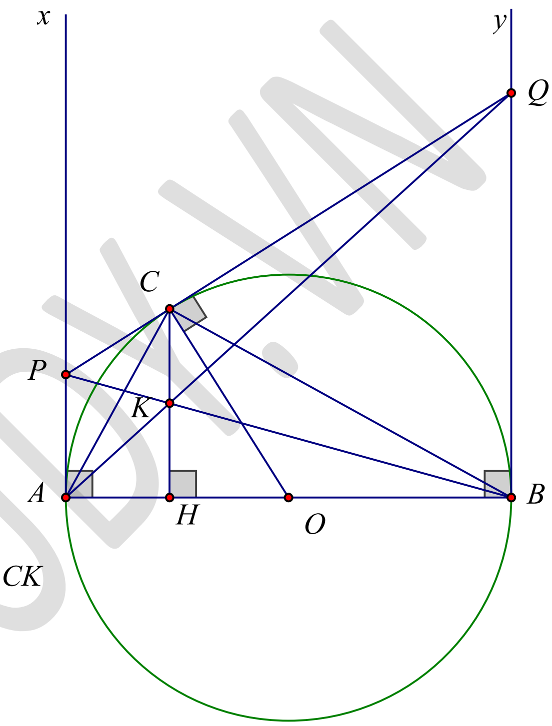
$\widehat{AMH}$: góc chung

$\Rightarrow \Delta MKH \backsim \Delta MHA(g-g) \Rightarrow \widehat{MKH}=\widehat{MHA}=90^o \Rightarrow HK \perp AM$

Vì K thuộc đường tròn $\left(O;\dfrac{AD}{2}\right)$ nên $\widehat{AKD}=90^o \Rightarrow DK \perp AM$ suy ra D,H,K thẳng hàng

Câu 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Từ một điểm C trên nửa đường tròn $(C \neq A, C \neq B)$, kẻ CH vuông góc với AB $(H \in AB)$, tiếp tuyến tại C cắt Ax và By theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng các đường thẳng BP, AQ, CH đồng quy.

HD:



Gọi K là giao điểm của PB và CH,

K' là giao điểm của AQ và CH.

Ta có: $CH // BQ // AP$ (vì cùng vuông góc với AB)

Xét tam giác PAB có: $CK // BQ$ (cmt) nên

áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{CK}{BQ} = \frac{PC}{PQ} \Rightarrow CK.PQ = PC.BQ$$

Xét tam giác AQP có: $\dfrac{CK'}{AP} = \dfrac{CQ}{PQ} \Rightarrow CK'.PQ = CQ.AP$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$PC = AP$ và $CQ = BQ$ nên $CK'.PQ = CK.PQ \Rightarrow CK' = CK$

Suy ra $K' \equiv K$

Vậy các đường thẳng BP, AQ, CH đồng quy.

ĐẠI SỐ

Câu 6. Giải các hệ

b) $\begin{cases} \sqrt{5x+1} + \sqrt{12-y} = 7 \\ \sqrt{5y+1} + \sqrt{12-x} = 7 \end{cases}$

HD:

ĐKXĐ: $-\dfrac{1}{5} \leq x, y \leq 12$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{5x+1} + \sqrt{12-y} = 7 \\ \sqrt{5y+1} + \sqrt{12-x} = 7 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5x+1} + \sqrt{12-y} - \sqrt{5y+1} - \sqrt{12-x} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5x+1} - \sqrt{5y+1}\right) + \left(\sqrt{12-y} - \sqrt{12-x}\right) = 0$$

Nhận thấy $x = y = -\dfrac{1}{5}$ hoặc $x = y = 12$ đều không là nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-y)}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{5y+1}}+\frac{x-y}{\sqrt{12-y}+\sqrt{12-x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{5}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{5y+1}}+\frac{1}{\sqrt{12-y}+\sqrt{12-x}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0$ (vì $\frac{5}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{5y+1}}+\frac{1}{\sqrt{12-y}+\sqrt{12-x}}>0\forall x,y\in\left[-\frac{1}{5};12\right]$)

$\Leftrightarrow x=y$

Khi đó ta có:

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{12-x}=7\Leftrightarrow 4x+13+2\sqrt{(5x+1)(12-x)}=49$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(5x+1)(12-x)}=36-4x\Leftrightarrow \sqrt{(5x+1)(12-x)}=18-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(5x+1)(12-x)=(18-2x)^2\\ x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-5x^2+59x+12=4x^2-72x+324\\ x\le 9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}9x^2-131x+312=0\\ x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(9x-104)(x-3)=0\\ x\le 9\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Leftrightarrow y=3$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=y=9$