

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9
RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN
BÀI TOÁN TÌM GTLN, GTNN

Họ và tên: Ngày học:

1. Dạng 1: Tìm min, max dựa vào đánh giá ĐK $x \geq 0$

+ Tìm giá trị lớn nhất của $A = a + \frac{b}{\sqrt{x+c}}$ ($b, c > 0$).

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = a - \frac{b}{\sqrt{x+c}}$ ($b, c > 0$).

+ Biểu thức dạng $A = \frac{a\sqrt{x}+b}{c\sqrt{x}+d}$

Câu 1. Cho $P = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{2\sqrt{x}-7}{x-\sqrt{x}-2}$ ($\begin{matrix} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{matrix}$) với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Chứng minh $P = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

(Thi vào 10- Thái Bình - 2021).

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$.

2. Dạng 2: Tìm min, max dựa vào Cô-si

+ Dùng Cô-si khử mẫu: $k.(MS) + \frac{q}{(MS)} \geq 2\sqrt{kq}$; ($k, q, MS > 0$).

Câu 4. Tìm GTNN của

a) $A = 4a + \frac{3}{a}$ với $a > 0$

b) $B = 2a + \frac{18}{a+2}$ với $a > 0$

c) $C = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ d)

$D = 2\sqrt{x} - 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$

e) $E = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$

Câu 5. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2}{x^2 - \sqrt{x^3}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+25}{x-\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Tìm x để biểu thức Q đạt giá trị nhỏ nhất.

(Thi vào 10- Nam Định - 2021).

Câu 6. Cho $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Tính A khi $x = 4$

b) Chứng minh $B = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

c) Tìm x để $P = 2AB + \sqrt{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(Thi vào 10 – Hà Nội – 2020)

Câu 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{-9x + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$.

Câu 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2x + \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+1}}$.

3. Dạng 3: Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x-n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) lớn nhất, nhỏ nhất.

• $B \geq k \Rightarrow \frac{1}{B} \leq \frac{1}{k}$ chỉ đúng khi B, k cùng dấu.

Phương pháp giải:

Ta thấy $\sqrt{x} - m$ âm hoặc dương, nên A âm hoặc dương. Vậy A_{max} xảy ra trong trường hợp A dương, còn A_{min} xảy ra trong trường hợp A âm.

+ **Tìm A_{max} :** A_{max} xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - m > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > m$.

mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x > m^2 \Rightarrow x \geq m^2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x} - m \geq \sqrt{m^2 + 1} - m > 0$.

$\Rightarrow A \leq \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} - m} \Rightarrow A_{max} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1} - m}$ khi $x = m^2 + 1$.

+ **Tìm A_{min} :** A_{min} xảy ra trong trường hợp $\sqrt{x} - m < 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < m \Rightarrow x < m^2$.

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq x \leq m^2 - 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{m^2 - 1} \Rightarrow -m \leq \sqrt{x} - m \leq \sqrt{m^2 - 1} - m < 0$.

$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1} - m} \Rightarrow A_{min} = \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1} - m}$ khi $x = m^2 - 1$.

Câu 9. Cho $x \in \mathbb{N}$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$.

Câu 10. Cho $x \in \mathbb{N}$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$.

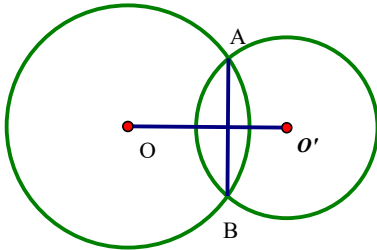
Giáo viên: Nguyễn Thành Long

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 9
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA 2 ĐƯỜNG TRÒN

Tài liệu lớp zoom 9.2 - 18h - 21h15 - Tối chủ nhật - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:Ngày học:

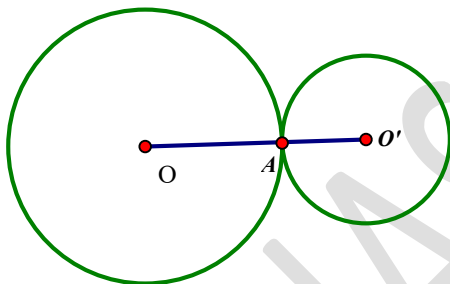
1. Hai đường tròn cắt nhau



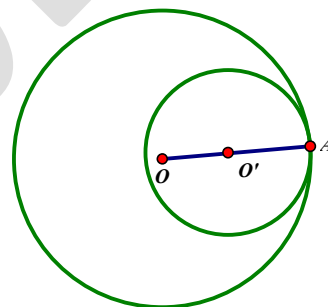
$(O) \cap (O') = \{A; B\} \Rightarrow AB$ là dây chung.

2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau

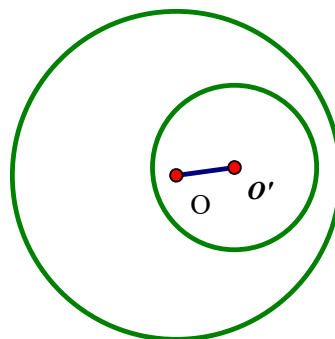
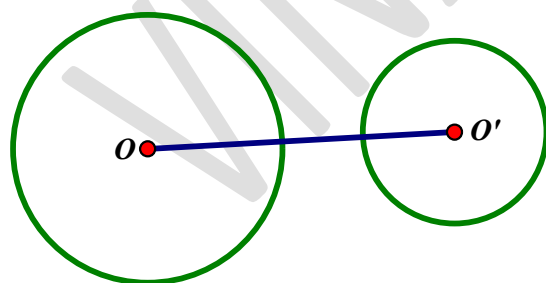
a) Tiếp xúc ngoài



b) Tiếp xúc trong



3. Hai đường tròn không có điểm chung



a)

b)

4. Tính chất đường nối tâm

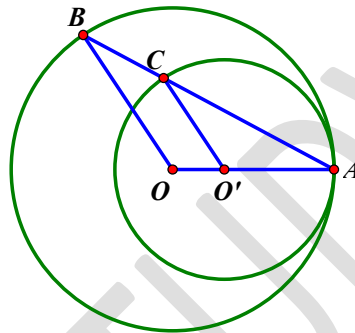
- a) Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm, tức là đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
- b) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Câu 1. Điền vào chỗ trống cho đúng:

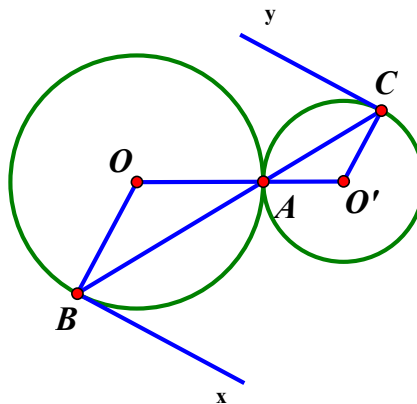
Vị trí tương đối của hai đường tròn	Số tiếp tuyến chung có thể vẽ được
Ở ngoài nhau
Cắt nhau
Tiếp xúc trong
Tiếp xúc ngoài

Câu 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A như hình vẽ.

Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

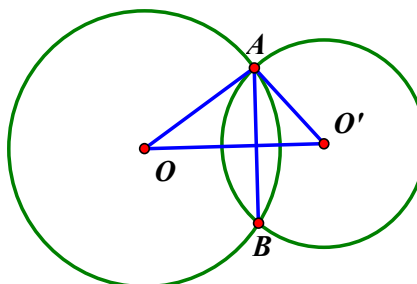


Câu 3. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A (hình dưới). Chứng minh rằng các tiếp tuyến Bx và Cy song song với nhau.



Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (hình dưới).

Biết $OA = 15cm$, $O'A = 13cm$, $AB = 24cm$. Tính độ dài OO' .



Câu 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn cũng là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO' .

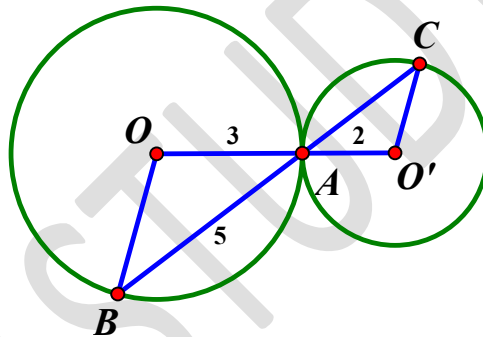
Câu 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài ở A . Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) ở B (khác A), cắt đường tròn (O') ở C (khác A), DE là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn, $D \in (O)$, $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng BD và CE . Chứng minh rằng:

a. $\widehat{EMD} = 90^\circ$

b. MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') .

Câu 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Kẻ các đường kính AOC , $AO'D$. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng và $AB \perp CD$.

Câu 8. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A (hình vẽ), $OA = 3, O'A = 2, AB = 5$. Tính độ dài đoạn AC .



Câu 9. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Qua A kẻ một đường thẳng cắt (O) tại C và cắt đường tròn (O') tại D . Tính tỉ số $\frac{AC}{AD}$ biết $OA = 3; OO' = 8$.

Giáo viên: Trần Tuấn Việt