Toán lớp 9: Nền tảng chuyên
HƯỚNG DẪN BÀI TẬP VỀ NHÀ
Tài liệu lớp học Zoom 9A0 – 18h – 21h15 – Tối chủ nhật – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:.. Ngày học:....................................

Câu 13. Cho $a\ge 1; b\ge 9; c\ge 16$ thỏa mãn a.b.c $=1152$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=bc\sqrt{a-1}+ca\sqrt{b-9}+ab\sqrt{c-16}$.

HD:

Ta có: $P=bc\sqrt{a-1}+ca\sqrt{b-9}+ab\sqrt{c-16}$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{abc}=\frac{\sqrt{a-1}}{a}+\frac{\sqrt{b-9}}{b}+\frac{\sqrt{c-16}}{c}\Leftrightarrow \frac{P}{1152}=\frac{\sqrt{a-1}}{a}+\frac{\sqrt{b-9}}{b}+\frac{\sqrt{c-16}}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2\sqrt{a-1}\le a-1+1=a\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a-1}}{a}\le \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{9(b-9)}\le 9+b-9=b\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b-9}}{b}\le \frac{1}{6}$$

$$2\sqrt{16(c-16)}\le 16+c-16=c\Leftrightarrow \frac{\sqrt{c-16}}{c}\le \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{1152}\le \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{19}{24}\Leftrightarrow P\le 912$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{a-1}=1\\ \sqrt{b-9}=\sqrt{9}\\ \sqrt{c-16}=\sqrt{16}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a-1=1\\ b-9=9\\ c-16=16\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=18\\ c=32\end{cases}$

Vậy max $P=912$ khi $\begin{cases}a=2\\ b=18\\ c=32\end{cases}$

Câu 14. Cho x, y, z là các số dương. Tìm GTNN của

$P=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{z+x}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\right)$.

HD:

$$P=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{z+x}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2x+y+z}{2(y+z)}.\frac{2y+x+z}{2(x+z)}.\frac{2z+x+y}{2(x+y)}$$

$$=\frac{(x+y)+(x+z)}{2(y+z)}.\frac{(x+y)+(y+z)}{2(x+z)}.\frac{(x+z)+(y+z)}{2(x+y)}$$

Đặt $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases} (a,b,c>0)$. Khi đó: $P=\frac{a+c}{2b}.\frac{a+b}{2c}.\frac{b+c}{2a}=\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8abc}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P\geq\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{8abc}=\frac{8abc}{8abc}=1$

Dấu "=" xảy ra khi: $a=b=c\Leftrightarrow x+y=y+z=z+x\Leftrightarrow x=y=z$

Vậy $\min P=1$ khi $x=y=z$

Câu 15. Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$.

HD:

Ta có: $a+b+c=abc\Leftrightarrow\frac{abc}{a+b+c}=1$. Khi đó:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}=\sqrt{\frac{\frac{abc}{a+b+c}}{\frac{abc}{a+b+c}+a^2}}=\sqrt{\frac{abc}{abc+a^2.(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{bc}{bc+a^2+ab+ac}}=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}=\sqrt{\frac{b}{a+b}.\frac{c}{a+c}}\overset{Cauchy}{\leq}\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\leq\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{b}{a+b}=\frac{c}{a+c} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{b+c} \\ \frac{a}{a+c}=\frac{b}{b+c} \\ a+b+c=abc \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ab+bc=ac+bc \\ ab+ac=ac+bc \\ ab+ac=ab+bc \\ a+b+c=abc \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=abc \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=b=c \\ 3a=a^3 \end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$ (vì $a,b,c>0$)

Vậy $\max P=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$