

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11**  
**PHÉP QUAY**  
**Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyễn Hồng**

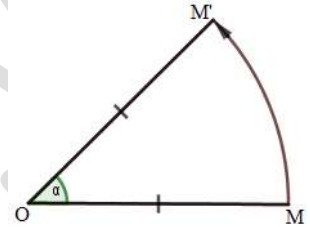
Họ và tên:.....Ngày học:.....

**1. Định nghĩa**

+) Trong mặt phẳng cho điểm  $O$  cố định và góc lượng giác  $\alpha$  không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $OM = OM'$  và  $(OM, OM') = \alpha$  được gọi là phép quay tâm  $O$  góc quay  $\alpha$

+) Kí hiệu:  $Q_{(O, \alpha)}$  ( $O$  là tâm quay,  $\alpha$  là góc quay lượng giác).

$$+) Q_{(O, \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM', OM) = \alpha \end{cases}$$



**Nhận xét:**

+) Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác (chiều kim đồng hồ).

+) Với  $k \in \mathbb{Z}$  ta luôn có:

$Q_{(O, 2k\pi)}$  là phép đồng nhất;

$Q_{(O, (2k+1)\pi)}$  là phép đối xứng tâm.

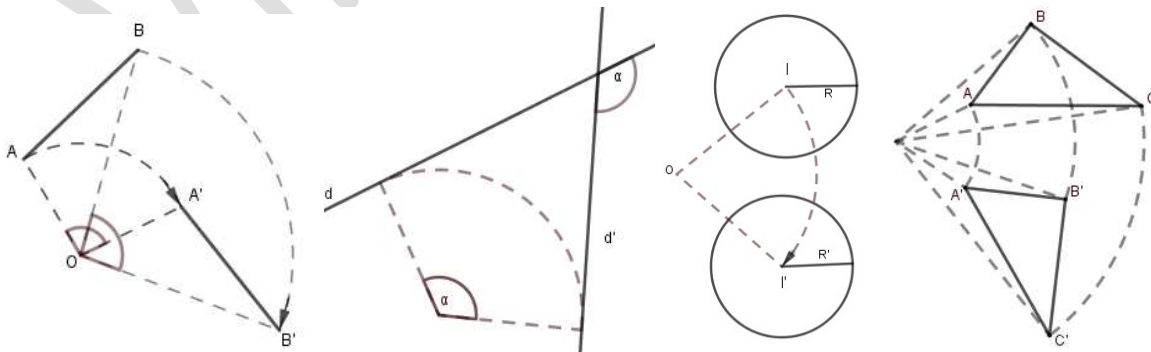
**2. Tính chất:**

**Tính chất 1:**

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

**Tính chất 2:**

Phép quay biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến tam giác thành tam giác bằng nó.



**Chú ý:**

Phép quay biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự.

**Nhận xét:** Gọi  $\alpha$  là góc của phép quay biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$  :

$$Q_{(O,\alpha)}(d) = d' \Rightarrow \text{Góc } (d, d') = \alpha \text{ nếu } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \text{ góc } (d, d') = \pi - \alpha \text{ nếu } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

**3. Biểu thức tọa độ**

+) Khi tâm quay trùng với gốc tọa độ  $O$  thì  $Q_{(O,\varphi)}(M(x; y)) = M'(x'; y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$ .

**Chú ý:**

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad \varphi = -90^\circ \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad \varphi = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

**DẠNG 1. CÁC BÀI TOÁN KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT PHÉP QUAY**

**Câu 1:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$ . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , biến hình chữ nhật thành chính nó?

**Câu 2:** Cho tam giác đều  $ABC$  có tâm  $O$ . Phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\varphi$  biến tam giác đều thành chính nó thì góc quay  $\varphi$  là góc nào?

**Câu 3:** Chọn 12 giờ làm mốc, khi kim giờ chỉ một giờ đúng thì kim phút đã quay được một góc bao nhiêu độ?

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ ,  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là trung điểm của  $OA$ . Tìm ảnh của tam giác  $AMN$  qua phép quay tâm  $O$  góc quay  $90^\circ$ ?

**Câu 5:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $\sqrt{2}$  và có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Các đường chéo cắt nhau tại  $I$ . Trên cạnh  $BC$  lấy  $BJ = 1$ . Xác định phép biến đổi  $\overline{AI}$  thành  $\overline{BJ}$  biết  $O$  là tâm quay.

**DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ẢNH MỘT ĐIỂM HOẶC MỘT HÌNH QUA PHÉP QUAY (CÓ TỌA ĐỘ)**

**Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , Qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến điểm  $M(-3;5)$  thành điểm nào.

**Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $M(1;1)$ . Tìm ảnh của điểm  $M$  qua phép quay tâm  $O(0;0)$ , góc quay  $45^\circ$ .

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  có phương trình  $5x - 3y + 15 = 0$ . Tìm ảnh  $d'$  của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$  với  $O$  là gốc tọa độ.

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , viết phương trình đường tròn  $(C')$  là ảnh của đường tròn  $(C)$  có phương trình  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  qua phép quay  $Q_{(O, \frac{\pi}{2})}$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu  $OM = OM'$  thì  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép quay tâm  $O$  góc quay  $\frac{\pi}{2}$ .

B. Nếu  $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$  thì  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép quay tâm  $O$  góc quay  $\pi$ .

C. Phép quay là phép đối xứng tâm.

D. Phép đối xứng tâm không phải là một phép quay.

**Câu 2.** Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?

A. Có một phép tịnh tiến theo vectơ khác vectơ- không biến mọi điểm thành chính nó.

B. Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.

C. Có một phép đối xứng tâm biến mọi điểm thành chính nó.

D. Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

**Câu 3.** Phép quay  $Q_{(O, \varphi)}$  với  $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  biến điểm  $A$  thành  $M$ . Khi đó:

(I):  $O$  cách đều  $A$  và  $M$ .

(II):  $O$  thuộc đường tròn đường kính  $AM$ .

(III):  $O$  nằm trên cung chứa góc  $\varphi$  dựng trên đoạn  $AM$ .

Trong các câu trên câu **đúng** là:

A. Cả ba câu.

B. chỉ (I) và (II).

C. chỉ (I).

D. chỉ (I) và (III).

**Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $A(3; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $A'$  là ảnh của điểm  $A$  qua

phép quay tâm  $O(0; 0)$  góc quay  $\frac{\pi}{2}$ :

A.  $A'(0; -3)$ .

B.  $A'(0; 3)$ .

C.  $A'(-3; 0)$ .

D.  $A'(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ .

**Câu 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , ảnh của điểm  $M(-6;1)$  qua phép quay  $Q_{(O,90^\circ)}$  là:

- A.  $M'(1;6)$ .                      B.  $M'(-1;-6)$ .                      C.  $M'(-6;-1)$ .                      D.  $M'(6;1)$ .

**Câu 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho phép quay tâm  $O$  biến điểm  $A(1;0)$  thành điểm  $A'(0;1)$ .

Khi đó nó biến điểm  $M(1;-1)$  thành điểm:

- A.  $M'(-1;-1)$ .                      B.  $M'(1;1)$ .                      C.  $M'(-1;1)$ .                      D.  $M'(1;0)$ .

**Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tạo ảnh của điểm  $M'(-6;1)$  qua phép quay  $Q(O,90^\circ)$  là:

- A.  $M(1;-6)$ .                      B.  $M(1;6)$ .                      C.  $M(-6;-1)$ .                      D.  $M(6;1)$ .

**Câu 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $M(1;1)$ . Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của  $M$  qua phép quay tâm  $O$ , góc  $45^\circ$ ?

- A.  $M'(-1;1)$ .                      B.  $M'(1;0)$ .                      C.  $M'(\sqrt{2};0)$ .                      D.  $M'(0;\sqrt{2})$ .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 3x - y + 2 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay tâm  $O$  góc quay  $-90^\circ$ .

- A.  $d': x + 3y + 2 = 0$ .                      B.  $d': x + 3y - 2 = 0$ .                      C.  $d': 3x - y - 6 = 0$ .                      D.  $d': x - 3y - 2 = 0$ .

**Câu 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: x - y + 2 = 0$ . Hãy viết phương trình đường thẳng  $d$  là ảnh của đường thẳng  $\Delta$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ .

- A.  $d: x + y + 2 = 0$ .                      B.  $d: x - y + 2 = 0$ .                      C.  $d: x + y - 2 = 0$ .                      D.  $d: x + y + 4 = 0$ .

**Câu 11.** Cho hình vuông tâm  $O$ . Xét phép quay  $Q$  có tâm quay  $O$  và góc quay  $\varphi$ . Với giá trị nào sau đây của  $\varphi$ , phép quay  $Q$  biến hình vuông thành chính nó?

- A.  $\frac{\pi}{6}$ .                      B.  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .                      C.  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .                      D.  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 12.** Cho hình chữ nhật tâm  $O$ . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm  $O$  góc  $\alpha$  với  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

- A. 0.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Câu 13.** Cho tam giác đều  $ABC$ , các đỉnh theo thứ tự ngược chiều quay kim đồng hồ. Hãy xác định góc quay của phép quay tâm  $A$  biến điểm  $B$  thành điểm  $C$

- A.  $\varphi = 30^\circ$ .                      B.  $\varphi = 90^\circ$ .                      C.  $\varphi = -120^\circ$ .                      D.  $\varphi = 60^\circ$ .

**Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho phép quay tâm  $O$  góc quay  $45^\circ$ . Tìm ảnh của đường tròn

$(C): (x-1)^2 + y^2 = 4.$

A.  $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4.$     B.  $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4.$

C.  $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4.$     D.  $x^2 + y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0.$

**Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(C')$  là ảnh của đường tròn  $(C)$  qua  $Q_{\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)}$ .

A.  $(C'): x^2 + (y-3)^2 = 4.$

B.  $(C'): (x-3)^2 + y^2 = 4.$

C.  $(C'): x^2 + (y+3)^2 = 4.$

D.  $(C'): (x+3)^2 + y^2 = 4.$

**Giáo viên: Trần Lê Cường**

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11**  
**LƯỢNG GIÁC – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC BẬC NHẤT VỚI SIN VÀ COS**  
Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyễn Hồng

## I. KIẾN THỨC BỔ SUNG

### 1. Công thức cộng cung

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

### 2. Công thức biến đổi biểu thức bậc nhất $T = a \cos x + b \sin x$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

## II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI HAI ÂN SIN, COS

### 1. Phương pháp

\* Phương trình có dạng  $a \sin u + b \cos u = c$  (1).

+ Điều kiện có nghiệm:  $a^2 + b^2 \geq c^2$ .

+ Điều kiện vô nghiệm:  $a^2 + b^2 < c^2$

+ Chia đều 2 vế phương trình (1) cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$(1) \Leftrightarrow \sin(u + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ hoặc } \cos(u - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \text{Phương trình cơ bản.}$$

**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

b)  $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

a)  $\sin x + \cos x - 1 = 0$

c)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$

d)  $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 2 = 0$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

a)  $\cos 3x + \sin 3x = -1$

b)  $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

d)  $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

c)  $5 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 13$

**Bài 3:** Giải các phương trình sau:

a)  $\sin x = \sqrt{2} \cos 5x - \cos x$

b)  $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$

c)  $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

d)  $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

**Bài 4:** Giải các phương trình:

a)  $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 4$

b)  $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$

**Bài 5:** Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm:

a)  $(m+3)\sin x + (2m-4)\cos x = m+5$

b)  $(2m-1)\sin 3x + m \cos 3x = 3m-1$

c)  $(2 \sin x - \cos x)^2 = m(\cos 2x + \sin 2x) \cdot c0$

**Bài 6:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

b)  $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 1$

a)  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 2$

**Bài 7:** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:  $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

**Giáo viên: Nguyễn Thành Long**