

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11

PHÉP VỊ TỰ

Tài liệu lớp học 11A1 - 18h - 21h15 - Tối thứ năm - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:.....Ngày học:.....

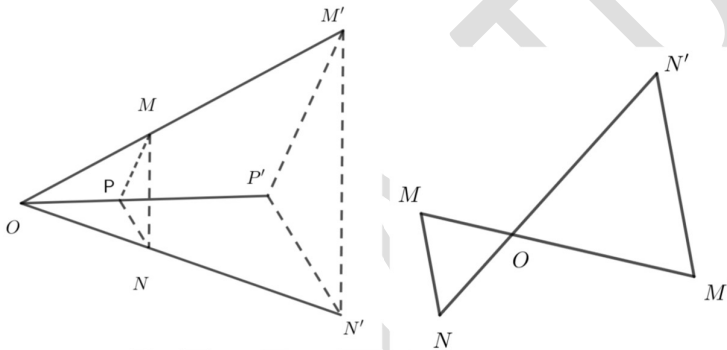
1. Định nghĩa

+) Cho điểm O cố định và số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overline{OM'} = k\overline{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O , tỉ số k .

+) Kí hiệu: $V_{(O,k)}$ (O là tâm vị tự, k là tỉ số vị tự) $V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{OM'} = k\overline{OM}$

Nhận xét:

- Khi $k > 0$, M và M' nằm cùng phía đối với điểm O
- Khi $k < 0$, M và M' nằm khác phía đối với điểm O
- Khi $k = -1$, M và M' đối xứng nhau qua tâm O nên $V_{(O,-1)} \rightarrow \mathcal{D}_O$
- Khi $k = 1 \Rightarrow M \equiv M'$ phép vị tự $V_{(O,1)}$ trở thành phép đồng nhất



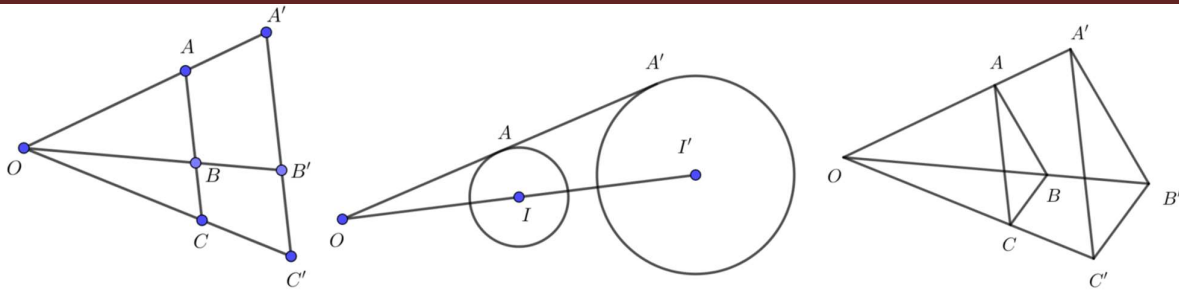
2. Tính chất:

Tính chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì

$$\overline{M'N'} = k\overline{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN.$$

Tính chất 2: Phép vị tự tỉ số k :

- +) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.
- +) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- +) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
- +) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|.R$



3. Biểu thức tọa độ

+) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự $V_{(I,k)}$; $I(x_0; y_0)$. Khi đó

$$V_{(I,k)}(M(x; y)) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \overline{IM'} = k\overline{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH ẢNH MỘT ĐIỂM HOẶC MỘT HÌNH QUA PHÉP VỊ TỰ (CÓ TỌA ĐỘ)

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y - 5 = 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\frac{2}{3}$.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ và $d': 2x - y - 6 = 0$. Phép vị tự $V_{(O,k)}(d) = d'$. Tìm k .

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy , tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$. Tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ và tỉ số $k = -2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho điểm M' là ảnh của điểm M qua phép vị tự tâm I tỉ số k mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $\overline{IM'} = k\overline{IM}$. B. $IM' = k.IM$. C. $\overline{IM} = k.\overline{IM'}$. D. $IM = k.IM'$.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , điểm $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm $M(x; y)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số k . Khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ C. $\begin{cases} x' = \frac{x}{k} \\ y' = \frac{y}{k} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x' = -kx \\ y' = -ky \end{cases}$

Câu 3. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó M là ảnh của G qua phép vị tự tâm A tỉ số k bằng:

A. $k = 2$. B. $k = -2$. C. $k = \frac{2}{3}$. D. $k = \frac{3}{2}$.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

A. $3x + y + 1 = 0$. B. $3x - y + 1 = 0$. C. $x + 3y + 1 = 0$. D. $3x + y - 1 = 0$.

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k = 2$.

A. $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 36$. B. $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 36$.
C. $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 9$. D. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 9$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$. Khi đó diện tích của hình tròn (C') là

A. 7π . B. $4\sqrt{7}\pi$. C. 28π . D. $28\pi^2$.

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(-2;4)$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. $(-3;4)$. B. $(-4;-8)$. C. $(4;-8)$. D. $(4;8)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Cho đường thẳng $\Delta: x + 2y - 1 = 0$ và điểm $I(1;0)$.

Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ thành Δ' có phương trình là:

A. $x - 2y + 3 = 0$. B. $x + 2y - 1 = 0$. C. $2x - y + 1 = 0$. D. $x + 2y + 3 = 0$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ và điểm $I(2;-3)$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là:

A. $(x-4)^2 + (y+19)^2 = 16$. B. $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 16$.
C. $(x+4)^2 + (y-19)^2 = 16$. D. $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 16$.

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11
PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX
Tài liệu lớp học 11A1 - 18h - 21h15 - Tối thứ năm - 23/26 Nguyễn Hồng

Họ và tên:.....Ngày học:.....

I. Phương trình đẳng cấp bậc 2

1. Dạng phương trình thuần nhất

$$a\sin^2 u + b\sin u \cos u + c\cos^2 u = 0 \quad (1)$$

a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ hoặc $c \neq 0$.

a) Cách 1

TH1: Kiểm tra xem $\cos u = 0$ ($\sin u = \pm 1$) có thỏa mãn là nghiệm của (1) không?

Nếu thỏa mãn thì $u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (1).

TH2: Khi $\cos u \neq 0 \Rightarrow u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chia 2 vế phương trình (1) cho $\cos^2 u$:

$$(1) \Leftrightarrow a\tan^2 u + b\tan u + c = 0. \text{ Đặt } t = \tan u, t \in \mathbb{R} \Rightarrow at^2 + bt + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan u$ mà ta đã học nên giải dễ dàng.

b) Cách 2:

$$\text{Sử dụng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi: } (1) \Leftrightarrow a \frac{1 - \cos 2u}{2} + b \frac{\sin 2u}{2} + c \frac{1 + \cos 2u}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow A\sin 2u + B\cos 2u + C = 0$$

Đây là phương trình bậc nhất 2 ẩn đã học.

2. Dạng phương trình đẳng cấp đầy đủ

$$a\sin^2 u + b\sin u \cos u + c\cos^2 u = d \quad (2). \text{ Trong đó: } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Ta có $d = d(\sin^2 u + \cos^2 u)$ sau đó quy về việc giải phương trình (1).

$$\text{Chú ý công thức: } \frac{1}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u.$$

3. Bài tập áp dụng

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0$

b) $\cos^2 x + \sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x - (1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

b) $3\sin^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x + 5\cos^2 x = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $4\cos^2 x + 3\sin x \cos x - \sin^2 x = 3$

b) $4\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1$

b) $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 1$

II. Phương trình đẳng cấp bậc ba

1. Phương trình tổng quát

$$a\sin^3 u + b\sin^2 u \cos u + c\sin u \cos^2 u + d\cos^3 u = 0 \quad (2)$$

2. Cách giải:

Bước 1: Thay $\cos u = 0$ vào phương trình để kiểm tra có thỏa mãn là nghiệm không?

Bước 2: Khi $\cos u \neq 0$, chia 2 vế phương trình cho $\cos^3 u$, đưa về phương trình bậc 3 theo $\tan u$.

Đặt $t = \tan u (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow at^3 + bt^2 + ct + d = 0$.

3. Bài tập áp dụng

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $4\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 3\sin x + 3\cos^3 x = 0$

b) $2\cos^3 x - 11\cos^2 x \sin x = 6\sin^3 x - 17\sin^2 x \cos x$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

b) $2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

Bài 7: Giải phương trình sau: $\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$

III. Trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $(\sqrt{3} + 1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} (\tan \alpha = -2 + \sqrt{3}) (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} (\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}) (k \in \mathbb{Z})$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} (\tan \alpha = -1 + \sqrt{3}) (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases} (\tan \alpha = 1 - \sqrt{3}) (k \in \mathbb{Z})$

Câu 2. Giải phương trình $3\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$ ta được:

A. $x = \frac{1}{2}\arctan 3 + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \arctan \frac{1 + \sqrt{73}}{12} + \frac{k\pi}{2}, x = \arctan \frac{1 - \sqrt{73}}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{1}{2}\arctan \frac{1 + \sqrt{73}}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{1}{2}\arctan \frac{1 - \sqrt{73}}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \arctan \frac{3}{2} + \frac{k\pi}{2}, x = \arctan(-1) + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 3. Một họ nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - \cos^2 x = -2$ là:

- A. $\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ B. $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ C. $-\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ D. $-\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 4. Phương trình $3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3}\sin 4x \cos 4x$ có nghiệm là:

- A. $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = -\frac{\pi}{5} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
 C. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 5. Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin^2 4x + 3\sin 4x \cos 4x - 4\cos^2 4x = 0$ có:

- A. Một nghiệm B. Hai nghiệm C. Bốn nghiệm D. Ba nghiệm

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \tan x = \cos x(4\sin x - \cos x)$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + \frac{k\pi}{2}$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k2\pi$
 C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + \frac{k2\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\pi$

Câu 7. Phương trình $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$
 C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 8. Giải phương trình $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x \cos x = 0$

- A. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
 C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Câu 9. Phương trình $2\cos^3 x = \sin 3x$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \arctan(-2) + x \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ B. $\begin{cases} x = \arctan(-2) \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$
 C. $\begin{cases} x = \arctan(-2) \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ D. $\begin{cases} x = \arctan(-2) + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(\pi + x) \cos x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(\pi + x) = 0$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 11. Phương trình $4\sin^2 \frac{x}{2} - 3\sin x + 2 = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. Vô nghiệm

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sin^2 x - m \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2m$ có nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 13. Phương trình $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$ có số họ nghiệm là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin 2x$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. Vô nghiệm

Câu 15. Phương trình $8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ có mấy họ nghiệm?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Giáo viên: Nguyễn Thành Long