BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11

XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:..Ngày học:..

1. Phép thử và biến cố

a. Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

b. Không gian mẫu: Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó và ký hiệu là Ω.

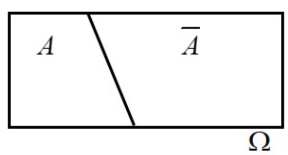
c. Biến cố: là một tập con của không gian mẫu.

+) Tập $\varnothing$ được gọi là **biến cố không thể** (gọi tắt là biến cố không).

+) Tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.

d. Phép toán trên các biến cố.

* **Biến cố đối**: Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$.



* Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

+) Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.

+) Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.

+) Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.

e. Bảng đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

2. Xác suất của biến cố.

a. Định nghĩa: Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$. Ta có:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

b. Tính chất của xác suất.

Định lí:

+) $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$.

+) $0\le P(A)\le 1$, với mọi biến cố A.

+) Nếu A và B xung khắc, thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (**công thức cộng xác suất**).

Hệ quả: Với mọi biến cố A, ta có: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

c. Các biến cố độc lập, công thức nhân xác suất.

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A.B)=P(A).P(B)$ **(công thức nhân xác suất).**

DẠNG 1: TÍNH XÁC SUẤT BẰNG PHƯƠNG PHÁP LIỆT KÊ

Câu 1: Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố A : “Mặt sấp xuất hiện hai lần”.

Câu 2: Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A : “Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3”.

Câu 3: Xét phép thử là gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Gọi N là biến cố “lần đầu xuất hiện mặt 5 chấm”. Tính xác suất của biến cố N.

Câu 4: Gieo 3 đồng xu cùng một lúc. Gọi A là biến cố “có ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt ngửa”. Tính xác suất của biến cố A.

Câu 5: Bạn Quân gieo một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố A: “Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần”.

Câu 6: Gieo ba con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc đó bằng nhau.

Câu 7: Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để hiệu số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc đó bằng 2.

Câu 8: Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối đồng chất. Tìm xác suất của biến cố: “ Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con xúc sắc bằng 1”.

Câu 9: Bạn Quân gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố A: "Tổng số chấm ở hai lần gieo là một số chia hết cho 5".

Câu 10: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 3 lần. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện ở hai lần gieo đầu bằng số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ ba.

Câu 11: Gọi T là phép thử "Gieo hai con súc sắc". Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên các mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 8". Hãy tính $P\left(A\right)$.

Câu 12: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử súc sắc xuất hiện mặt b chấm. Xác suất để phương trình $x^2+2bx+4=0$ có nghiệm.

Câu 13: Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để thẻ được lấy ghi số chẵn.

Câu 14: Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để thẻ được lấy ghi số chia hết cho 3.

Câu 15: Một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20.Lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp đó. Tính xác suất thẻ lấy được ghi số chia hết cho cả 2 và 3.

DẠNG 2: TÍNH XÁC SUẤT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH THỨ TỰ

Câu 16: Bốn bạn nam và bốn bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho nam nữ ngồi xen kẽ nhau.

Câu 17: Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 5 bạn nữ được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để 5 bạn nữ đứng cạnh nhau.

Câu 18: Sáu nam sinh và bốn nữ sinh được xếp vào hai dãy, mỗi dãy gồm 5 ghế đối diện nhau. Tính xác suất sao cho các bạn nam ngồi đối diện nhau.

Câu 19: Một bàn dài có 2 dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Tính xác suất để của biến cố: "bất kì 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau".

Câu 20: Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra 2 tấm thẻ. Tính xác suất để tích của 2 số trên 2 tấm thẻ là một số chẵn.

Câu 21: Có 3 bì thư giống nhau lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3 và 3 con tem giống nhau lần lượt đánh số thứ tự từ 1 đến 3. Dán 3 con tem đó vào 3 bì thư sao cho bì thư nào cũng có tem. Tính xác suất để mỗi bì thư đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó.

Câu 22: Cho tập hợp $A=\left\{2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,8\right\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có đúng hai chữ số lẻ.

DẠNG 3: TÍNH XÁC SUẤT BẰNG CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Câu 23: Một lớp học 40 học sinh gồm có 15 học sinh nam giỏi Toán và 8 học sinh nữ giỏi Văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất để chọn được một nam sinh giỏi Toán hoặc một nữ sinh giỏi Văn.

Câu 24: Một hộp có 5 quả cầu xanh và 4 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 quả cầu. Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra có cùng màu.

Câu 25: Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Gọi ngẫu nhiên 3 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để có ít nhất 1 học sinh giỏi.

Câu 26: Trong một lớp học gồm 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi đó có cả nam và nữ.

Câu 27: Một hộp có 10 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 5 quả từ hộp đó. Tính xác suất để được 5 quả có đủ hai màu.

Câu 28: Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên bi màu đỏ.

Câu 29: Trong kho đèn trang trí có 5 bóng đèn loại I và 7 bóng đèn loại II, các bóng đèn khác nhau về màu sắc và hình dáng. Lấy ra 5 bóng đèn bất kì. Tính xác suất để 5 bóng đèn lấy ra có đủ hai loại và số bóng đèn loại I nhiều hơn số bóng đèn loại II.

Câu 30: Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho trong 2 người được chọn có ít nhất 1 nữ.

Câu 31: Rút ngẫu nhiên 3 viên bi từ một hộp 10 bi gồm 6 bi đỏ và 4 bi trắng. Tính xác suất để 3 bi rút ra cùng màu.

Câu 32: Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là $0,6$. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Tính xác suất để một viên đạn bắn trúng mục tiêu và một viên đạn bắn trượt mục tiêu.

Câu 33: Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất để bắn trúng của từng người là $0,8$ và $0,9$. Tính xác suất để có một người bắn trúng mục tiêu.

Câu 34: Ba xạ thủ A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1, A_2, A_3 tương ứng là $0,7$; $0,6$ và $0,5$. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

Câu 35: Có hai hộp cùng đựng các quả cầu. Hộp thứ nhất có 7 quả cầu đỏ và 5 quả cầu xanh. Hộp thứ hai có 6 quả cầu đỏ và 4 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ.

Câu 36: Một chiếc hộp đựng 10 quả bóng trong đó có 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh. Bốc liên tiếp hai quả bóng trong hộp ra . Tính xác suất để lần một bốc được quả màu đỏ và lần hai bốc được quả màu xanh.

Câu 37: Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã được ghi sẵn địa chỉ cần gửi. Tính xác suất để có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

Câu 38: Một nhóm có 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Nhóm muốn xếp theo hàng ngang để chụp ảnh kỉ niệm. Tính xác suất để không có bạn nam nào đứng kề nhau.

Câu 39: Một nhóm có 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Nhóm muốn xếp theo hàng ngang để chụp ảnh kỉ niệm. Tính xác suất để không có bạn nam nào đứng kề nhau.

Câu 40: Từ các số $1;2;3;4;5;6;7$ lập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên ra 1 số. Tính xác suất để số được chọn có chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước (tính từ trái sang phải).

Câu 41: Xét tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 1 số từ A. Tính xác suất để số được chọn có chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước (tính từ trái sang phải).

Câu 42: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để chọn được số trong đó chữ số 2 đứng liền giữa chữ số 1 và 3.

Câu 43: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để lấy được số mà trong đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn chữ số đứng trước.

Câu 44: Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S tính xác suất để số chọn được là một số chia hết cho 5.

Giáo viên: Trần Lê Cường

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TOÁN 11

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Tài liệu lớp học 11A1 – 18h – 21h15 – Tối thứ năm – 23/26 Nguyên Hồng

Họ và tên:...Ngày học:...

Lý thuyết. Phương pháp quy nạp toán học

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \ge 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n = 1 + 1 = 2$. Vì nó đúng với $n = 2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n = 2 + 1 = 3, \ldots$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \ge p$ (p là một số tự nhiên) thì:

Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;

Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \ge p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Dạng: Ứng dụng phương pháp quy nạp để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, tính chia hết, hình học

A. Phương pháp giải

Giả sử cần chứng minh đẳng thức $P(n) = Q(n)$ (hoặc $P(n) > Q(n)$) đúng với $\forall n \ge n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $P(n_0),\ Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0) = Q(n_0)$

Bước 2: Giả sử $P(k) = Q(k);\ k \in \mathbb{N}, k \ge n_0$, ta cần chứng minh $P(k+1) = Q(k+1)$.

B. Bài tập tự luận

Câu 1: Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Câu 2: Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$

Câu 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có

a. $1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + ... + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4.3^n}$

Câu 4: Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $a_n = 16^n - 15n - 1 \vdots 225$

Câu 5: Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $B_n = (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(3n) \vdots 3^n$

C. Bài tập trắc nghiệm

Câu 6: Một học sinh chứng minh mệnh đề "$8^n + 1$ chia hết cho $7, \forall n \in \mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, tức là $8^k + 1$ chia hết cho 7.

- Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$, kết hợp với giả thiết $8^k + 1$ chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Câu 7: Cho $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \dfrac{n-1}{n}$. **B.** $S_n = \dfrac{n}{n+1}$. **C.** $S_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n = \dfrac{n+2}{n+3}$.

Câu 8: Cho $P_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ với $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \dfrac{n+1}{n+2}$. **B.** $P = \dfrac{n-1}{2n}$. **C.** $P = \dfrac{n+1}{n}$. **D.** $P = \dfrac{n+1}{2n}$.

Câu 9: Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

B. $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

C. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Câu 10: Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Câu 11: Với $n\in\mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức $S=1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$.

A. $S=n(n+1)^2$. **B.** $S=n(n+2)^2$.

C. $S=n(n+1)$. **D.** $S=2n(n+1)$.

Câu 12: Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $T_n=1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2$ và $M_n=2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$. **B.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+1}$. **C.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{8n+1}{n+1}$. **D.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{2n+1}{n+1}$.

Giáo viên: Nguyễn Thành Long